SOBRE FILTROS DIGITALES

Ing. SATURNINO LEGUIZAMON
Prof. Titular de la Cátedra de Servomecanismos - Facultad Ingeniería
Universidad de Mendoza

Introducción

Este trabajo pretende dar un panorama general e introductorio de los filtros digitales y responde a inquietudes formuladas por alumnos de la cátedra de Sistemas de Control.

Esta técnica ha cobrado gran impulso con el desarrollo de las computadoras digitales y constituye una aplicación directa de las mismas a la resolución de problemas técnicos-científicos.

En tal sentido, vale la pena destacar la importancia de sus aplicaciones en el procesamiento de señales en comunicaciones y control automático, sismología, procesamiento digital de imágenes, etc.

Es innecesario mencionar que el grado de desarrollo y el vasto campo de aplicación alcanzado por esta técnica no se pueden resumir en las breves páginas de este artículo[1]. No obstante, la intención del mismo es destacar sólo aquellos aspectos que se consideran básicos para la comprensión del tema.

1. Conceptos Generales

Se define como filtro digital al proceso computacional por medio del cual una señal muestreada, o secuencia numérica, que actúa como entrada, es transformada en otra secuencia numérica llamada señal de salida, de manera tal que el espectro de frecuencia de la salida es diferente del espectro de frecuencia de la señal de entrada.

Como surge de la definición, el filtro digital es un algoritmo de computación, por lo que sería más correcto llamarlo filtro numérico.

Esquemáticamente tendríamos lo ilustrado en la Fig.

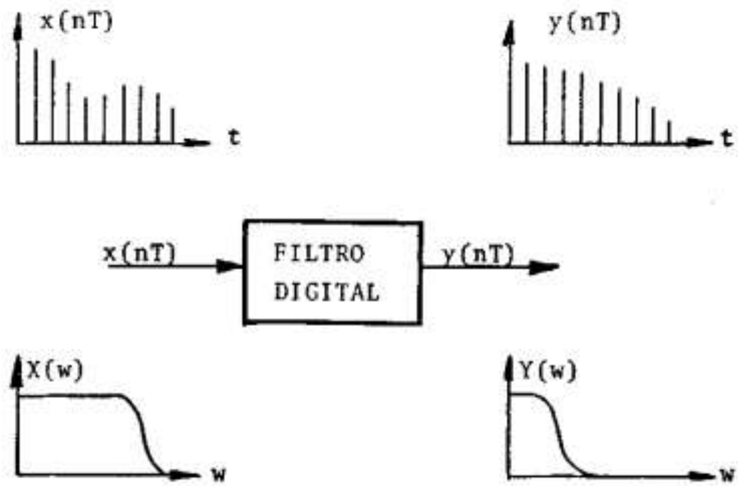

Fig. 1: Efecto del filtrado.

El objetivo que persigue la operación de filtrado es modificar el espectro de frecuencia de la señal discreta de entrada; de la misma forma que lo haría un filtro analógico sobre una señal continua.

Por lo tanto, el proceso computacional puede corresponder a un filtro pasa-alto, pasa-bajo, de rechazo de frecuencia, etc.

Las ventajas fundamentales que presenta el filtrado digital frente al filtrado analógico son: [3]

—No existen cambios en las características del filtro debido a variación de los componentes por temperatura, envejecimiento, etc.

—Tiene gran flexibilidad, puesto que la respuesta del filtro puede ser alterada cambiando el valor numérico de los coeficientes.

—Se elimina la necesidad de la calibración periódica.

—Puede lograrse gran precisión, la cual está limitada sólo por número de dígitos involucrados en el proceso de cálculo.

—Cuando estos filtros se implementan en circuitos integrados tienen un tamaño pequeño, consumen baja potencia, son de poco peso y bajo costo relativo.

2. Modelo Matemático de un Filtro Digital

Los filtros analógicos se representan matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales; los filtros digitales, por el contrario se representan mediante ecuaciones de diferencia.

La forma de la ecuación de diferencia dependerá del tipo de filtro que se represente.

Los filtros digitales pueden clasificarse en dos tipos fundamentales; los filtros recursivos y los no recursivos. [1, 2, 4].

2.1. Filtros digitales no - recursivos

La respuesta de un filtro no recursivo (o transversal), lineal e invariante en el tiempo, en el instante nT es de la forma:

$$y(nT) = \ldots + b_{-2}\, x(nT + 2T) + b_{-1}\, x(nT + T) + b_0\, x(nT) + b_1\, x(nT - T) + b_2\, x(nT - 2T) + \ldots$$

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\, x(nT - kT)$$

Si asumimos que trabajamos con señales de entrada causales, como es el caso que se presenta prácticamente tenemos:

$$y(nT) = b_0\, x(nT) + b_1\, x(nT - T) + b_2\, x(nT - 2T) + \ldots$$

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x(nT - kT)$$

Esta expresión incluye una serie infinita de términos, lo que no resulta práctico. Lo más frecuente es tener un número limitado de coeficientes;

Si tomamos

$b_k = 0$ para $k > N$ tendremos:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{N} b_k\, x(nT - kT) \qquad (1)$$

Como se observa en la expresión (1) la salida del filtro en el instante nT, depende del valor de la entrada en el mismo instante y de N instantes anteriores.

2.2. Filtros digitales recursivos

La respuesta -de un filtro recursivo en el instante nT es función de la entrada en el mismo instante y de las entradas y salidas en los instantes anteriores.

De esta manera tendremos:

$$y(nT) + a_1\, y(nT-T) + a_2\, y(nT-2T) + \dots + a_M\, y(nT-NT) =$$

donde $M \geq N$; o :

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{N} b_k\, x(nT-KT) - \sum_{k=1}^{M} a_k\, y(nT-KT) \quad (2)$$

$$= b_0\, v(nT + b_1\, x(nT-T) + \dots\, b_N\, x(nT-NT)$$

En el caso que las a = 0 para k = 1,2, ... N, la expresión (2) queda reducida a la (1). O sea, que, los filtros no recursivos pueden considerarse como un caso particular de los recursivos.

2.3. Transformada Z

A los efectos de considerar la respuesta en frecuencia de los filtros continuos resulta útil trabajar en el dominio de frecuencia, para lo cual se aplica la transformada de Laplace o de Fourier a las ecuaciones diferenciales que representan al filtro.

Por los mismos motivos, al trabajar con filtros digitales resulta de mucha utilidad hacerlo en el dominio de frecuencia complejo, que se consigue aplicando la transformada Z a la ecuación de diferencias correspondiente. Sea una función continua e(t), si se toman muestras en forma periódica con período T se obtiene una señal discreta e*(t).

Se define como transformada Z de e*(t), y la designaremos E(z), a la transformada de Laplace de e*(t) para s= (1/T) 1nz.

En símbolos:

$$E(z) = \mathcal{Z}\left[e^*(t)\right] = \mathcal{L}\left[e^*(t)\right]_{s=(1/T)\ln z} = E^*(s)\Big|_{s=(1/T)\ln z}$$

o

haremos aquí un análisis de las características y propiedades de esta transformación ya que la misma suele verse en los cursos de control o comunicaciones mediante señales discretas. Por otra parte existe suficiente bibliografía sobre este tema [1, 2, 3].

Si aplicamos la transformada Z a la expresión (2) tendremos:

$$Y(z) = \sum_{k=o}^{N} b_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k} Y(z)$$

donde z^{-1} es el operador del retardo unitario.

Entonces encontrando la relación entrada-salida tendremos:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} \quad (3)$$

Que denominamos función de transferencia del filtro.

Esta forma suele encontrarse con mucha frecuencia en la literatura.

3. Realización de Filtros Digitales - Formas canónicas

La realización de un filtro digital consiste en diseñar un algoritmo de computación que lleve a cabo las operaciones indicadas en la expresión (3).

Pero a esta expresión se le puede dar distintas formas equivalentes, logrando con ello la obtención de filtros que tienen distintas particularidades. Existen tres formas básicas de realización; llamadas también formas canónicas; ellas son la forma directa, en cascada y en paralelo [1, 4, 5].

3.1. Forma directa

Sea la expresión:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=o}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (4)$$

$$Y(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}} X(z) \quad (5)$$

Si operamos algebraicamente sobre esta expresión llegamos a un diagrama representativo de las operaciones realizadas en (5) que puede indicarse según la figura (2).

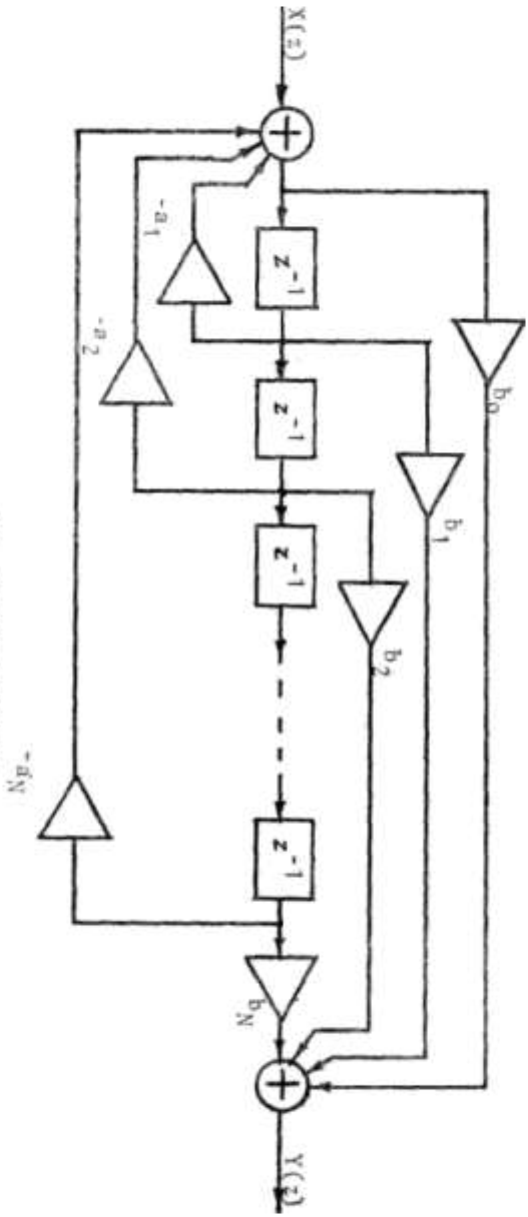

Fig. 2: Forma Directa.

Donde cada bloque rectangular representa un retardo unitario y cada bloque triangular un multiplicador por el factor indicado en sus adyacencias.

3.2. **Forma en cascada**

Esta forma surge de factorear los polinomios numerador y denominador en la expresión (5) obteniendo H (z) de la forma siguiente:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{m} \frac{\alpha_{2i} z^{-2} + \alpha_{1k} z^{-1} + 1}{\beta_{2i} z^{-2} + \beta_{1k} z^{-1} + 1}$$

donde m es la parte entera de (N + 1)/2.

Así por ejemplo: si N = 3, será m = 2.

Entonces

$$H(z) = bo \frac{\alpha_{21} z^{-2} + \alpha_{11} z^{-1} + 1}{\beta_{21} z^{-2} + \beta_{11} z^{-1} + 1} \, \frac{\alpha_{22} z^{-2} + \alpha_{12} z^{-1} + 1}{\beta_{22} z^{-2} + \beta_{12} z^{-1} + 1}$$

Podemos escribir:

$$H(z) = bo\ H_1(z)\ H_2(z)$$

ó:

$$Y(z) = bo\ H_1(z)\ H_2(z)\ X(z) \qquad (7)$$

Operando algebraicamente llegamos a un diagrama que representa este sistema y que se muestra en la Fig. 3.

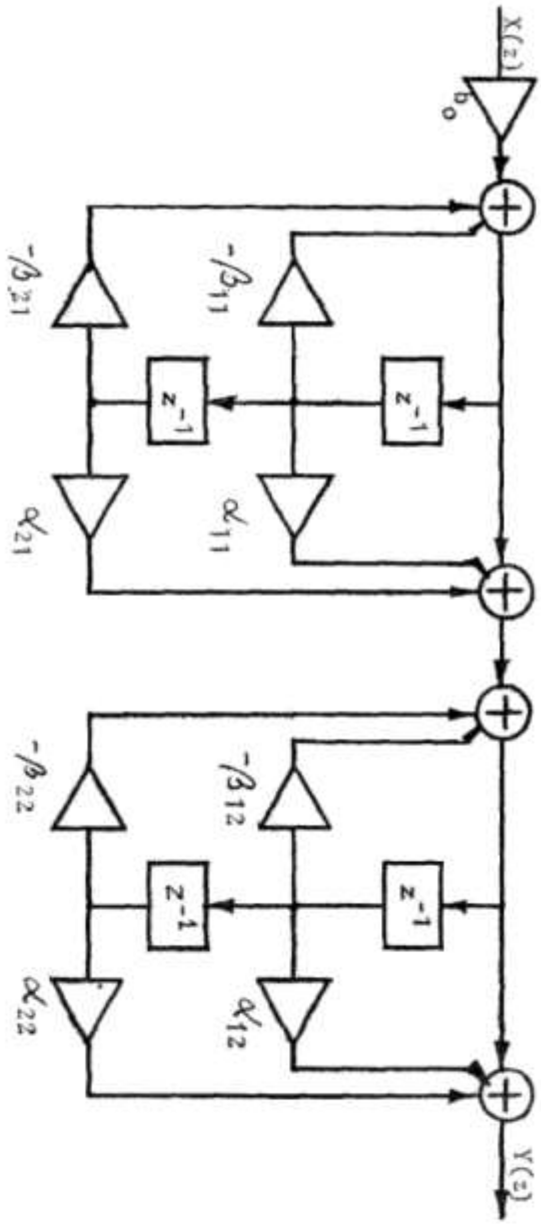

Fig. 3: Forma en Cascada.

3.3. **Forma Paralela.**

Si operamos sobre la expresión (5) de tal forma que en lugar de tener H (z) como producto de factores H (z) como en (7) la tenemos como suma de varios sumandos tendremos:

$$H(z) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} H_k(z)$$

ó:

$$H(z) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{0k}}{\beta_{2k} z^{-2} + \beta_{1k} z^{-1} + 1} \quad (8)$$

El diagrama correspondiente lo tenemos en la Fig. 4.

La particularidad que tienen estas formas canónicas es que cualquiera sea la forma elegida, el número de elementos de retardo es el mismo y dependerá del orden del sistema. Sin embargo, no siempre es ventajoso ajustarse a una determinada red y el filtro podrá realizarse en la forma que resulte más adecuada. Esto dependerá de factores tales como velocidad y precisión deseados.

4, Diseño de Filtros Digitales

El diseño de un filtro digital consiste en encontrar una función de transferencia de pulsos G(z) que satisfaga una especificación dada. Este diseño involucra la búsqueda de los coeficientes del filtro G(z).

Una forma de diseñar filtros digitales recursivos en el dominio de frecuencia puede ramificarse en dos métodos principales: uno que es llamado indirecto y requiere el diseño previo de la función de transferencia de un filtro continuo G(s) y luego se pasa al dominio del plano z por medio de una transformación apropiada.

El segundo método, que es el denominado directo está relacionado con la representación en el plano z del filtro digital y se obtiene G(z) trabajando directamente en el plano z. [4].

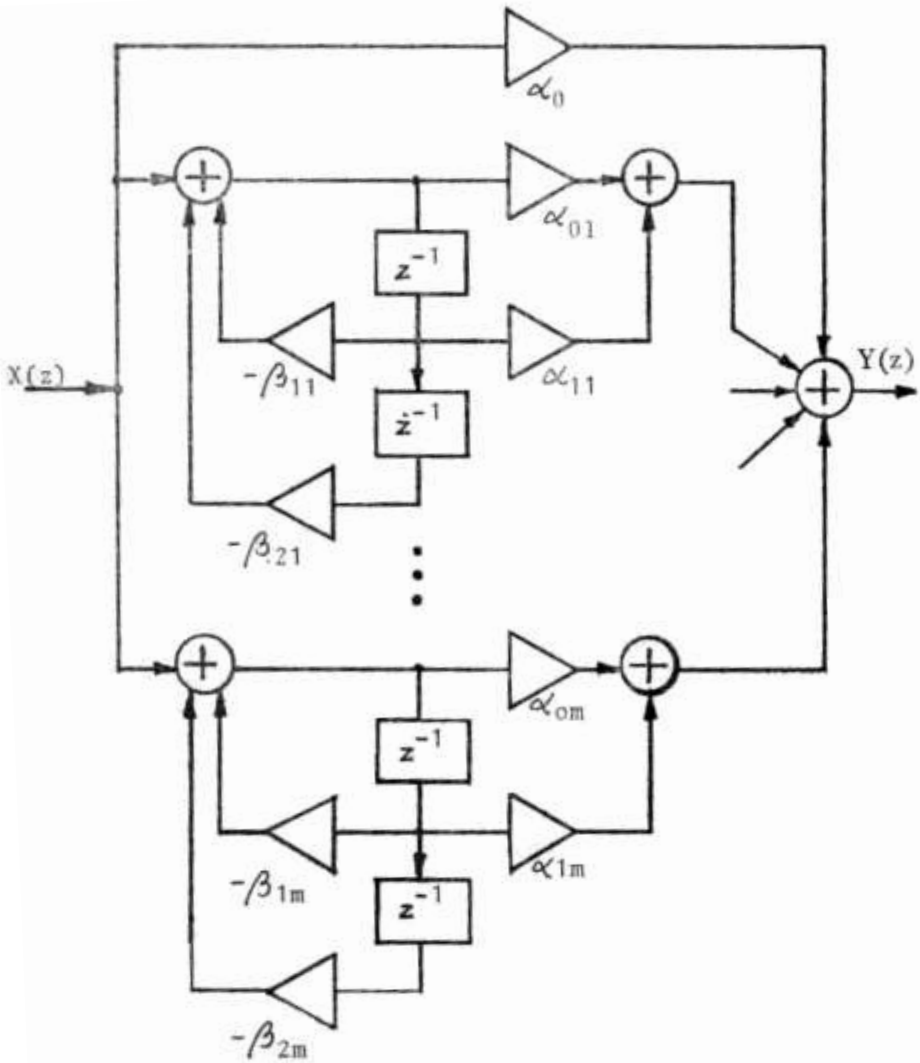

Fig. 4: Forma en paralelo

4.1. **Método indirecto**

Como se desprende de lo enunciado anteriormente, el método indirecto exige el diseño de filtros continuos (analógicos) y, en particular, el diseño de filtros del tipo Butterworth y Chebyshev.

Una vez encontrado el G(s) especificado, es necesario hacer una transformación del plano s al plano z.

Este pasaje suele hacerse utilizando la transformada z ordinaria o la transformada z bilinleal, o cualquier transformación adecuada. La transformada bilineal es la más utilizada y consiste en considerar.

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{o recíprocamente :} \quad z = \frac{1 + s}{1 - s}$$

Esta transformada tiene propiedades muy interesantes que la hacen de una gran utilidad en el diseño de filtros digitales; entre las más importantes podemos citar:

1) Es una aplicación uno a uno del semiplano izquierdo abierto sobre el disco unitario abierto.
2) Es una aplicación uno a uno del eje imaginario, incluyendo el punto en el infinito, sobre el círculo unitario.
3) Es una aplicación uno a uno del semiplano derecho abierto sobre el complemento, en el plano complejo, del disco unitario cerrado.

De esta manera toda función racional en s es transformada en una función racional en z lo que implica que para todo filtro continuo representado por una función racional existe un filtro digital representado también por una función racional y viceversa.

4.2. **Método directo**

Una manera de diseñar filtros digitales en forma directa es operando sobre la ubicación de polos y ceros de la función de transferencia. Este método se basa en aprovechar el efecto que tiene la ubicación de estos polos y ceros sobre la respuesta de un sistema discreto a diferentes señales de entrada.

Para mostrar este efecto, analizaremos qué es lo que sucede con un filtro pasa-bajos sencillo cuando modificamos los valores da sus coeficientes, lo que significa que movemos sus polos y ceros en el plano complejo z.

Un filtro pasa-bajos es aquel que permite el pasaje de las componentes de baja frecuencia de una señal y rechaza o atenúa las de alta frecuencia.

Un sistema caracterizado por la función de transferencia siguiente:

$$H(z) = bo \frac{z}{z - p} \qquad (9)$$

se comportará como filtro pasa-bajos si elegimos en forma adecuada los valores de b v p.

Como se puede apreciar en la expresión (9), este sistema tiene un cero en z = 0 y un polo en z = p en el plano complejo z (ver Fig. 5).

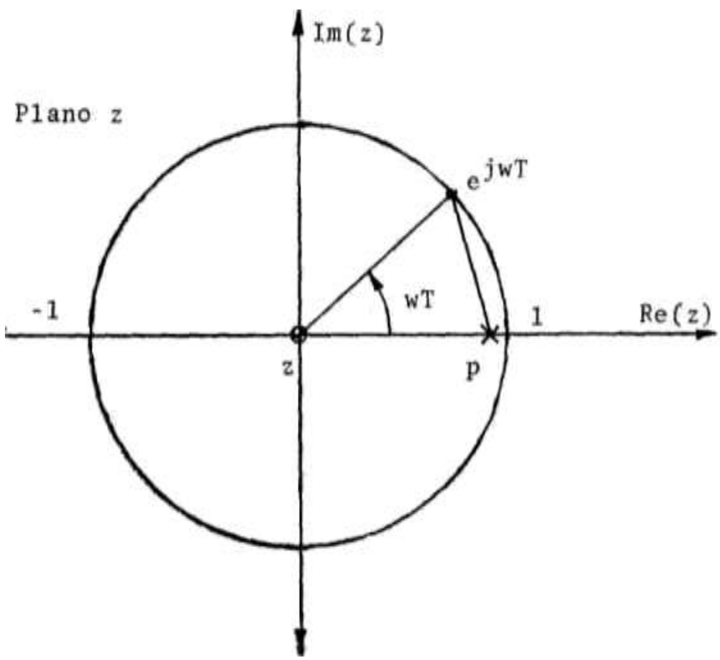

Fig. 5: Polos y ceros del filtro pasa-bajo.

La respuesta en frecuencia se obtiene haciendo $z = e^{jwT}$; donde T = período de muestreo.

$$H(e^{jwT}) = bo \frac{e^{jwT}}{e^{jwT} - p} \qquad (10)$$

Si hacemos $b_0 = 1 - p$; tendremos un valor normalizado del módulo de $H(e^{jwT})$, siendo igual a 1 para w = 0.

Entonces, el módulo y la fase de H (e^{JwT}) estarán dados por:

$$\left|H(e^{jwT})\right| = \frac{1 - p}{\sqrt{1 - 2\,p\,\cos wT + p^2}} \quad (11)$$

$$\theta(e^{jwT}) = wT - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen} wT}{\cos wT - p} \quad (12)$$

Si graficamos la expresión (11) en función de w tenemos el gráfico de la Fig. 6 para dos valores del polo p.

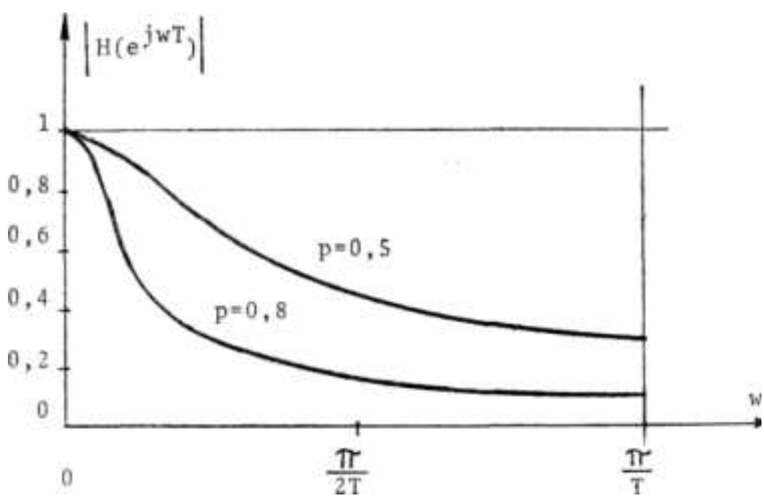

Fig. 6: Respuesta en frecuencia del filtro pasa-bajo para distintos valores de p.

Vemos que según la ubicación del polo, se lograrán distintas características de la respuesta en frecuencia. De esta manera, operando geométricamente sobre las posiciones de polos y ceros se pueden obtener diseños satisfactorios. [1, 4]

4.3. Problemas en el diseño

Si bien los filtros digitales gozan de importantes ventajas frente a los filtros continuos, es prudente señalar que los primeros presentan también inconvenientes que son inherentes a su naturaleza digital. [5, 6]

Los filtros digitales presentan fundamentalmente dos problemas que deben tenerse en cuenta en el diseño; estos son estabilidad y precisión.

Ei problema de la precisión surge debido al hecho de que los procesos aritméticos requeridos por el filtro, son ejecutados con precisión finita; es decir las cifras deben redondearse debido a la limitación en la capacidad de los registros.

El problema de la estabilidad aparece particularmente en los filtros digitales recursivos debido a la acción de realimentación inherentes a los mismos. El problema de la estabilidad se ve acentuado por la falta de precisión.

La elección adecuada de la topología del filtro y la forma de su realización serán de fundamental importancia para reducir los problemas mencionados.

REFERENCIAS

[1] CADZOW, J.A. **Discrete-Time Systems**, 1973 Prentice-Hall.

[2] KUO F.F. y KAISER J.F., **System Analysis by Digital Computer**, 1987. John Wüey and Sons, Inc.

[3] SCHMIDT L. A. **Designing Programmable Digital Filters for LSI Implementation**, Hewlett-Packard Journal, September 1978.

[4] TRETTER S. A. **Discrete-Time Signal Processing**, John Wiley and Sons.

[5] JACKSON L.B. y Otros, **An Approach to the implementation of Digital Filters**, IEEE Transactions Audio Electroacustics, vol. AS-16, Sept. 1988.

[6] KAISER J.F., **Some practical considerations in the realization of Linear digital filters**, Proc. third Annual Conference on Circuit and System Theory, Illinois, October 1985.