LA TRANSFORMADA WAVELET

Ing. Jesús Rubén Azor Montoya

Introducción

La Teoría de los Wavelets es una rama de la matemática relativamente nueva, la cual ha encontrado aplicaciones muy rápidamente en un gran número de disciplinas incluyendo la Física, Análisis Numérico, Procesamiento de Señal, Probabilidad y Estadística.

La utilidad de la transformada Wavelet es debida al hecho de que puede ser usada para aproximar funciones/señales de acuerdo a escala resolución usando un conjunto de funciones base llamadas **wavelets.**

Los Wavelets permiten representaciones de funciones en las cual se retiene tanto la escala como la información espacial. Muchas funciones pueden ser aproximadas con gran exactitud usando sólo un pequeño número de coeficientes wavelet.

La Transformada Wavelet también puede ser usada para representar económicamente, características de interés localizadas en una señal, lo cual la convierte en un candidato ideal para la extracción de características en contextos de clasificación.

La Transformada Wavelet no es estrictamente un método estadístico de reconocimiento de patrones, sino que es un método de pre procesamiento que permite que los datos sean expresados más sucintamente.

Cómo trabaja

El uso de la Transformada Wavelet para extracción de características puede ser descripto de varias maneras. Puede ser usado como una técnica de filtrado para la remoción de los componentes de alta frecuencia incluidas en los datos, o usado como un método para representar la información de manera sucinta. Alternativamente, tiene excelentes propiedades para la compresión de datos.

La Transformada Wavelet Discreta (DWT) transforma un vector de datos de longitud **n** en otro vector de coeficientes wavelets de longitud n, usando un conjunto de n funciones bases ortogonales llamadas **wavelets.**

Cada coeficiente wavelet se calcula tomando el producto escalar del vector de datos por una de las funciones base. El conjunto de las funciones base se deriva a partir de una única función (frecuentemente llamada **"Wavelet Madre"**) por una serie de dilataciones y traslaciones.

Transformadas Wavelets y Fourier

La DWT es similar a la Transformada de Fourier en algunos aspectos, a diferencia de las funciones base seno y coseno de la Transformada de Fourier, los wavelets están localizados en el **espacio** así también como en la **escala.**

A fin de discutir las ventajas de la DWT, es útil compararla con la Transformada de Fourier "Ventaneada" o de "Corto Tiempo", ya que ha sido una de las técnicas clásicas más populares para pre-procesa-miento de datos con características localizadas.

La Transformada de Fourier es un buen método para representar datos donde las características a pequeña escala (en este caso, alta frecuencia) representan el detalle o ruido originante en la señal o función, y las características a gran escala (baja frecuencia) representan las formas básicas.

Sin embargo, tiene la desventaja de que la información de frecuencia obtenida a partir de la Transformada de Fourier es **global,** debido a que sus funciones base son funciones seno y coseno. Esto no es satisfactorio cuando se requieren características de localización.

El problema puede ser parcialmente superado usando la Transformada de Fourier Ventaneada o de Corto Tiempo, por medio de la cual la señal a ser analizada se multiplica por una función ventana antes de calcular su Transformada de Fourier.

No obstante, este método tiene el problema que una ventana de tamaño fijo en el dominio original es acompañada por una ventana fija en el dominio de Fourier. Lo que realmente se necesita es: una **ventana larga** para analizar los componentes de **escala grande y** una **ventana estrecha** para detectar las características de **pequeña escala.**

Esto es exactamente lo que provee la Transformada Wavelet.

LA TRANSFORMADA WAVELET

El conjunto de funciones base se obtiene a partir del Wavelet Madre **g** basic (t) por dilataciones controladas por la variable a, y traslaciones controladas por la variable b, de acuerdo a la ecuación:

$$g\,(a, b, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot g_{basic}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Una función tal como **g** se dice que es un wavelet si satisface la siguiente **condición de admisibilidad** necesaria para obtener la "Transformada Wavelet Inversa":

$$\int \frac{(|g'(\omega)|)^2}{|\omega|}\, d\omega < \infty$$

donde es la Transformada de **g' (ω)** es la Transformada de Fourier c Fourier de g(t) También la función debería tener energía finita, esto **es;**

$$\int (|g(t)|)^2\, dt < \infty \qquad y \qquad g'_{basic}\,(\omega) = 0 \qquad para \qquad \omega < 0$$

Hay muchos tipos de Transformada Wavelet, siendo de gran importancia aquellas en las cuales el conjunto de las funciones base es **ortonormal.**

La Transformada Wavelet de una señal f(x) a escala *2'* se define por el producto:

$$w_{2^j, b} = \sum_{i=1}^{n} f(i) \cdot g\left(2^j, b, i\right)$$

La Transformada wavelet puede ser descripta de varias maneras. Una forma elegante es el Análisis Multiresolución de Mallat. Este describe a una Transformada Wavelet como un proceso para representar una función con diferentes niveles de aproximación.

El primer nivel aproxima la función muy generalmente, proyectándola en un espacio generado por dos funciones base de gran escala. El segundo nivel será un poco menos general (usando cuatro funciones base) y así siguiendo. El último nivel representará completamente la señal y la transformada inversa de esta representación reproducirá la señal original.

La DWT puede así ser usada para particionar el vector característico en una secuencia de sub espacios, cada uno de ellos representando un nivel de escala diferente.

El algoritmo DWT opera transformando el vector característico inicial en un nuevo vector que es llenado secuencialmente con los coeficientes wavelet de diferentes escalas.

Cada escala corresponde a una dilatación diferente del Wavelet Madre.

Los coeficientes de menor numeración representan las características de escala más grandes (baja frecuencia) en el vector característico original y los de mayor numeración representan las características de escala más pequeñas.

Así para un vector de longitud 2^j los coeficientes están ordenados en j niveles de escala - representando cada nivel de escala el vector de datos a cierta resolución. El nivel de escala 1 está representado por los coeficientes wavelet 1 y 2. El nivel de escala i, donde i = 2 ... j, está representado por los coeficientes wavelet numerados desde 2^{i-1} + 1 a 2^i.

A partir de esto se puede ver que el número de coeficientes que representan un nivel de escala crece en un factor de dos a medida que la escala de las características decrece.

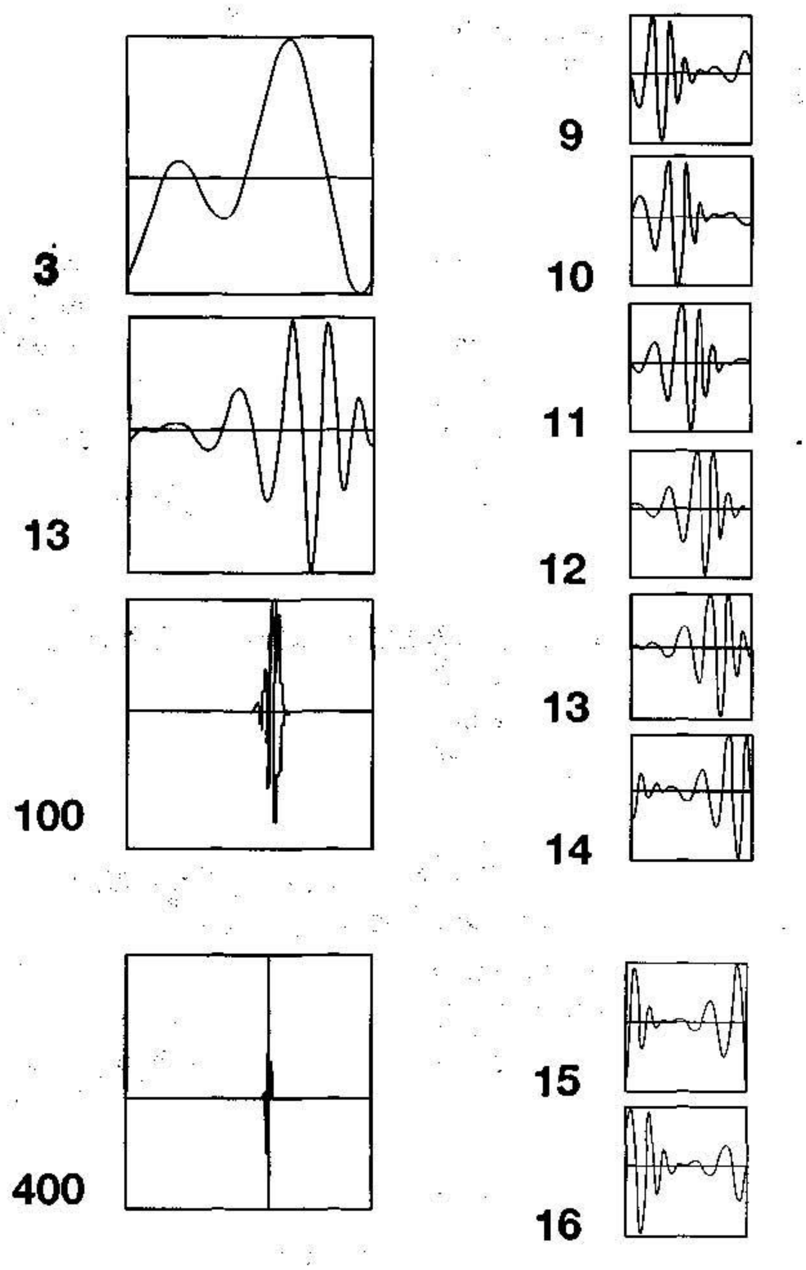
Esto tiene el efecto deseado de adaptar el tamaño de la ventana a la escala de las características.

Esto significa que el número de coeficientes usados para representar la información de alta frecuencia es substancialmente mayor que aquel para representar la información de baja escala. Si estos representan ruido pueden ser descartados con poca pérdida de información.

A diferencia de los senos y cosenos que definen una única Transformada de Fourier no hay un único conjunto de wavelets: de hecho, hay infinitos conjuntos posibles.

La elección exacta del Wavelet Madre involucra un compromiso entre su grado de ajuste y su grado de localización.

Una serie popular de wavelets es la de Daubechies. La siguiente figura muestra algunas de las 512 funciones base derivadas de 20 wavelets Madre de Daubechies.



Bibliografía

AZOR MONTOYA, J. R.: WAVELETS CON MATHCAD, Trabajo Final, Universidad de Mendoza Facultad de Ingeniería, 1998.

AZOR MONTOYA, J. R.: SUPLEMENTOS, Recopilación de artículos. Universidad de Mendoza Facultad de Ingeniaría, 1998.

SWELDENS, W; SCHROEDER, R: Building your owns wavelets at home. http: //cm.bell-labs.com/who/wim/papers/athome. ps. gz

LANKHORST, M.; VAN DER LAAN, D.: "Wavelet-based Signal Approximation with Genetic Algorithms". ftp://ftp.cs.rug.nl/pub/cs-reports/wavelet.ps.gz

VIDAKOVI', B; MULIER, R: "Wavelets for Kids" ftp://ftp.isds. duke. edu/pub/Users/brani/papers/wav4kidsA .ps.Z

STRANG, G.: "Wavelets and dilation equations: a brief introduction". http://www-math.mit.edu/-gs/papers/siamrev.ps.gz