

# **MODELADO Y CONTROL DE UN SISTEMA DE ASCENSORES, A TRAVÉS DE LOS SISTEMAS DE EVENTOS DISCRETOS**

**Ing. Daniel Héctor Nacif**

## **INTRODUCCIÓN**

En los edificios inteligentes, se presenta un inconveniente en cuanto al control de tráfico de pasajeros que acceden al edificio. La idea de “control”, no apunta a limitar el ingreso y el egreso de las personas al edificio, sino el de establecer la forma más eficiente para satisfacer a todas las personas que ingresan y egresan del edificio. Para optimizar esta situación, se procede al análisis del sistema de ascensores, el cual es el nudo gordiano del tránsito.

El presente trabajo pretende analizar un controlador de despacho adaptativo para el sistema de ascensores. Y en particular lo analizaremos frente a la situación más rigurosa en cuanto al funcionamiento, el cual es el tráfico de sobrepico el que ocurre cuando se inicia la actividad en el día.

A continuación se describe la propuesta de trabajo:

## **PROPUESTA ANÁLISIS DE TRABAJO**

Este trabajo pretende dar una descripción y un modelo del tráfico de pasajeros en un edificio de oficinas, más puntualmente un modelo del período de sobrepico de afluencia de personas al edificio.

Como objetivo de este modelo se pretende establecer una tasa de servicio óptima del sistema de ascensores de un determinado tipo de edificio de oficinas.

Se parte que el sistema de ascensores tiene los sensores adecuados para determinar la localización del carro del ascensor y el número de pasajeros en dicho carro. De modo de lograr implementar una

estrategia sencilla del control del tráfico de pasajeros que acceden al edificio a través de los ascensores, y minimizar así el tiempo de espera de los pasajeros en el vestíbulo principal.

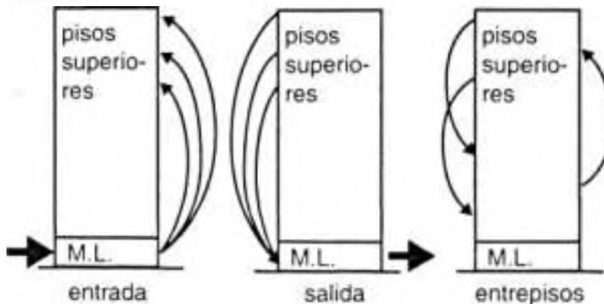
Un ejemplo del control del tráfico es una decisión sistemática de “cuándo” y “dónde” cada carro debería moverse, pararse, o interrumpir su dirección basándose en el estado actual y la evolución histórica del sistema.

En general el objetivo de la estrategia de un despachador del tráfico de ascensor depende del edificio; en particular un edificio de oficinas, la meta buscada es la de lograr minimizar el tiempo promedio de espera de los pasajeros.

## DESCRIPCIÓN BÁSICA-ANÁLISIS DE SITUACIÓN [1; 2]

El tráfico de pasajeros en un edificio de oficinas, se lo puede considerar en base a las combinaciones siguientes:

- Tráfico entrante: representa pasajeros que llegan al pasillo principal y viajan con destino a pisos superiores.
- Tráfico saliente: representa pasajeros que viajan desde los pisos superiores hacia el pasillo principal.
- Tráfico entre pisos: representa a los pasajeros que se mueven aleatoriamente entre los diferentes pisos además del primero M.L. = main lobby, vestíbulo, pasillo principal del edificio.



*Fig. 1 - componente de tráfico básico de pasajeros en un edificio de oficinas.*

Por ejemplo, el tráfico en el modo de "tiempo de almuerzo": este ocurre a la mitad del día: lo podemos considerar como un tráfico de salida, dado por los trabajadores que van a almorzar.

También sería un tráfico entrante provocado por los trabajadores que regresan del almuerzo.

El modo de tráfico en el pico mínimo: ocurre al final del día, es sólo un tráfico saliente, provocado por trabajadores que parten del edificio.

El modo de tráfico de sobrepico (de nuestro interés en particular) ocurre en la mañana y es exclusivamente entrante. Llegan los trabajadores y todos toman el ascensor para ir a sus oficinas.

Se ha considerado que todos tienen que cumplir rigurosamente un horario, y éste es muy similar para todas las personas ingresantes.

Durante el sobrepico, los pasajeros llegan únicamente al primer piso y desde allí a los otros pisos (tráfico saliente). En el primer piso son servidos más pasajeros (el ascensor toma pasajeros para destinarlos a pisos superiores, y luego realiza una carrera expreso hacia abajo).

♦ En la mayoría de los sistemas de ascensores utilizan la estrategia del "próximo carro" para ser despachado (sólo un carro se carga por vez); se refiere como el carro próximo diseñado para ser despachado. Todos los otros carros que pueden estar esperando en el primer piso, mantienen sus puertas cerradas o utilizan otro modo de desalentar a los pasajeros a entrar. Analizando para una situación de sobrepico, la solución a la pregunta acerca del control de despacho, se simplifica decidiendo cuándo y dónde se despacha cada carro del ascensor, el próximo carro diseñado. Si nuestro sistema de ascensores tiene los sensores adecuados para estimar el número de pasajeros que se encuentran efectivamente dentro del carro, entonces es posible determinar el más simple plan de despacho para el sobrepico. Es un plan con un umbral de 1, el despacho del próximo carro diseñado, cuando el número de pasajeros dentro no es cero, con 0 como parámetro del umbral;  $6 = 1$  es el plan. Se lo destaca similar a una condición de referencia, en secciones posteriores se detalla el significado de "umbral".

♦ Otro plan de despacho para la condición de sobrepico está dado en términos de la media capacidad del carro del ascensor, más el tiempo de salida extra (se temporiza alrededor de los 20s), luego se despacha un ascensor.

El problema básico en ambos planes es aproximar la naturaleza del lazo abierto.

Durante el sobrepico, que es de una hora por cada mañana de un día típico en un típico edificio de oficinas, la tasa de arribo de pasajeros se puede duplicar desde un intervalo al próximo (se toman Intervalos de 5 minutos). Es una condición muy rigurosa para un buen desempeño del plan de despacho de lazo abierto.

## FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El período de sobrepico que es una hora aproximadamente, es aquel tiempo virtual de entrada de la población del edificio. Considerándose esta población como la más crítica del día es decir la que llega al pasillo central (principal, o vestíbulo) y requiere un ascensor para el servicio.

Ver la figura siguiente.

El comienzo del día de trabajo es a las 9:00 horas del día, y que el período de sobrepico puede tener una variación entre 30 y 40 minutos.

Ref.: - En la fig. 2 los Intervalos de tiempo en abscisas, es dado cada 10 minutos, el origen de coordenadas se refiere a las 8:20 horas (mañana) Hasta las 9:20 horas (mañana).

En el eje de ordenadas está aforada la tasa de arribo de pasajeros al edificio. La unidad de medida en el eje es "pasajero por minuto", y en este eje el intervalo está indicado cada 5 unidades comenzando desde 5 hasta 40.

En la figura 3 la entrada al modelo de cola está dado por el arribo de personas al corredor principal, vestíbulo, mientras que la salida está dada por el arribo de carros al vestíbulo. Se destaca que los carros de los ascensores son idénticos y que cada uno tiene una capacidad "C".

Los pasajeros arriban a la entrada y van a la sala de espera donde algún plan de control de despacho se utilizará para decidir cuántos ascensores (carros) serán cargados.

Al sistema ascensor se lo puede representar por el modelo de cola de espera, como se muestra en la figura 3.

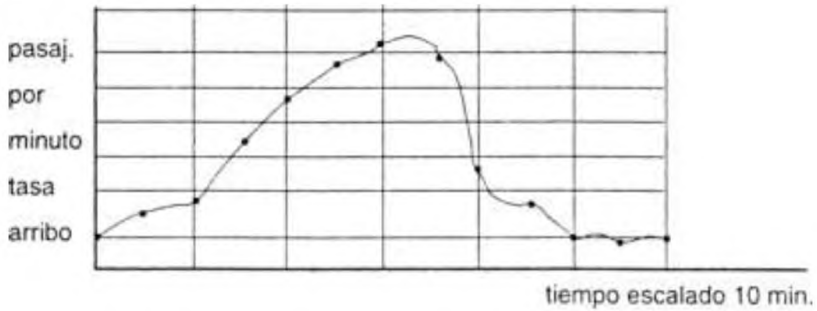


Fig. 2 - tasa de arribo típico de pasajeros ingresantes.

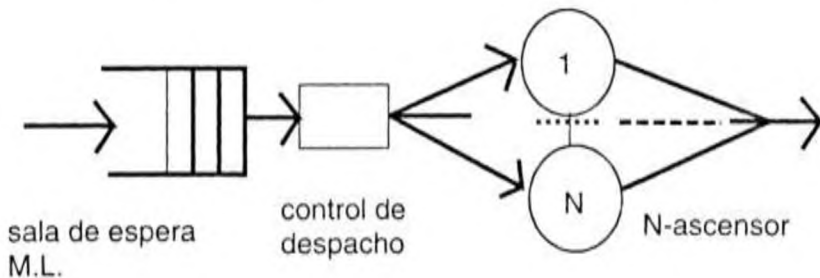


Fig. 3 - Modelo de cola para un sistema de ascensor durante el sobrepico.

Los pasajeros son servidos por números idénticos de carros con capacidad "C" finita de pasajeros.

Cabe destacar que para aproximar los resultados del presente trabajo se empleará un modelo de decisión de Markov [3;4]. Como sistema de eventos discretos se define:

$X$  = variable de estado

$X = \{ (y,z): y = 0,1,\dots ; z = 0,1,2,\dots, N \}$

$x = (y,z)$  representa el estado

$y$  = longitud de la cola en la sala de espera principal (vestíbulo)

$z$  = número de carros que esperan en el vestíbulo

La dinámica es manejada por los eventos "arribos de pasajeros", lo que ocurre cuando los pasajeros arriban a la sala de espera; y por los eventos "arribos de carros", lo que sucede cuando un ascensor retorna al pasillo principal (vestíbulo) luego de servir a los pasajeros.

La *acción de control* se toma únicamente cuando un evento ocurre y ellos se definen como:

$Uz = \{ 0,1,\dots,n,\dots,z ; z=0,1,2,\dots,N \}$

$u = 0$  esto indica que todos los carros posibles están detenidos para el primer piso (vestíbulo)

$u = 1$  carga un carro y éste es despachado

$u = 2$  permite cargar 2 carros (ambos a la vez) y son despachados simultáneamente

$u = n$  indica que  $n$ -carros son permitidos para ser cargados al mismo tiempo y despachados simultáneamente.

Cuando los carros regresan al vestíbulo, asumimos que lo hacen vacíos, y cada carro puede servir a  $C$ -pasajeros desde el vestíbulo. El resto de los pasajeros esperará en el vestíbulo hasta que el otro carro regrese por ellos, de modo que no haya sobrecarga en los carros.

Si definimos  $[y - C]^* = \max \{ (y - C), 0 \}$

$[y - 2C]^* = \max \{ (y - 2C), 0 \}$

Entonces el despacho de un elevador sirve a los pasajeros:

$$= \min \{y, C\}$$

y dejando atrás en la cola de espera el vestíbulo la cantidad de pasajeros  $[y - C]^+$

Recordemos que para nuestro ejemplo de dos elevadores, el control de despacho permite cargar de pasajeros a un carro por vez. Mientras que despachando ambos ascensores sirven a una cantidad de pasajeros  $= \min \{y, 2C\}$ ; y la cantidad de pasajeros que quedan esperando en el vestíbulo es  $[y - 2C]^+$ .

Se observa que no todas las acciones son admitidas para todos los estados. En particular,  $U(y,z)$  (un subconjunto de  $U$ ) denota el conjunto de acciones admitidas desde el estado  $x=(y,z)$  y tenemos que:

$U(y,0) = \{0\}$  No es permitido el despacho cuando los carros no están disponibles.

$U(y,1) = \{0,1\}$  Dos carros no pueden ser despachados cuando sólo uno es disponible

$U(y,2) = \{0,1,2\}$  Cuando ambos carros están disponibles, toda acción en  $U$  es admitida.

La siguiente figura ilustra un sistema de despacho con un umbral de referencia, se ha considerado el caso de  $N = 2$  carros, y cada uno con  $C = 4$  pasajeros. El sistema umbral (se hace referencia más adelante en este trabajo) con:

$$\hat{\theta}^{1,1} = \hat{\theta}^{2,2} = 2$$

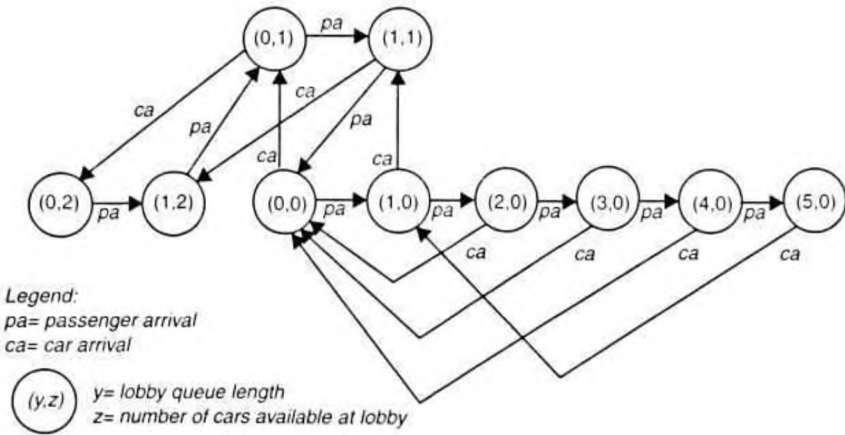


Fig. 4 - Diagrama de Transición de Estados para un sistema de ascensores de dos carros, durante el período de sobre-pico, operando bajo una estrategia umbral

Al implementar la acción del control  $u = 1$  cuando ambos carros son posibles de utilizar, un carro se carga antes que el otro “técnica del próximo carro a ser despachado”. Como los carros retornan vacíos ellos no necesitan abrir sus puertas en los pisos intermedios; pero cuando ellos alcanzan el vestíbulo, entonces pueden abrir sus puertas, pero un carro abre primero las puertas y una vez cargado, las abre el otro (se carga un carro por vez).

Utilizaremos las técnicas de uniformización estándar para convertir una cadena de Markov continua, en el tiempo en una de Markov [5] discreta en el tiempo.

Es complejo elegir una tasa uniforme, la tasa total de eventos para los N-carros la indicaremos como:

$$\gamma = \lambda + N.\mu$$

Para nuestro caso  $\gamma = \lambda + 2.\mu$  en donde tenemos 2 ascensores o sea  $N=2$ .



En este modelo uniformizado, los eventos ficticios "ca" (no provocan variación de estado, ca ≡ arribo de carros al vestíbulo) se incluye para precisar que la tasa de eventos posibles es inferior que  $\gamma$ . Sin perder la generalidad asumimos que la escala de tiempos se ha normalizado para  $\gamma = 1$ . La acción de control se torna para el comienzo de cada escalón o paso del tiempo.

Como  $\lambda$  cambia en todo el período de sobrepico, etapa del transitorio, es preciso utilizar algún mecanismo para adaptar los valores (cadena de Markov).

$P_{i,j} = (u)$  equivale a la probabilidad condicional del estado para el próximo escalón de tiempo sea

$j \in X$  dado que el estado para el escalón de tiempo actual es  $i \in X$  y la acción de control se toma para el escalón de tiempo actual, es  $u \in U(i)$ .

Estas probabilidades de transiciones de estados se las puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 P_{i,j}(0) &= \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & i = (y,0); j = [(y+1),0] \\ 2, \mu & ii = (y,0), j = (y,1) \end{array} \right\} \\
 P_{i,j}(0) &= \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & i = (y,1); j = [(y+1),1] \\ \mu & i = (y,1); j = (y,2) \\ \mu & i = j = (y,1) \end{array} \right\} \\
 P_{i,j}(0) &= \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & i = (y,2); j = [(y+1),2] \\ 2, \mu & i = j = (y,2) \end{array} \right\} \\
 P_{i,j}(1) &= \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & i = (y,1); j = ([y-C]^+ + 1), 0 \\ 2, \mu & i = (y,1), j = ([y-C]^+ + 1) \end{array} \right\} \\
 P_{i,j}(0) &= \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & i = (y,2); j = ([y-C]^+ + 1), 1 \\ \mu & i = (y,2); j = ([y-C]^+ + 2) \\ \mu & i = j = ([y-C]^+ + 1) \end{array} \right\} \\
 P_{i,j}(1) &= \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & i = (y,2); j = ([y-2C]^+ + 1), 0 \\ 2, \mu & i = (y,2), j = ([y-2C]^+ + 1) \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Para estas expresiones, las primeras filas corresponden para el estado transitorio inducido por el evento "pa". Todo el transitorio restante se induce por el evento "ca", incluyendo los eventos ficticios "ca" introducidos para la uniformización.

En la segunda expresión por ejemplo, el último evento "ca" es ficticio, porque uno de los carros que es factible de utilizar al mismo tiempo está arribando al vestíbulo, por lo tanto no puede generar un evento "ca" real.

En la tercer expresión ambos eventos "ca" son ficticios porque ambos carros están disponibles para el vestíbulo. En la quinta expresión el último evento "ca" es ficticio, en este caso este puede parecer que el evento ficticio provoca el cambio de estado, lo cual no es el caso. Aquí el estado para el inicio del escalón tiempo es  $i = (y, 2)$ . Tomando la acción  $u = 1$  para el comienzo del escalón de tiempo que provoca un cambio de estado inmediato hacia un estado intermedio  $i' = ([y-C], 1)$ . Cuando ocurre el evento ficticio "ca" no hay cambio de estado con respecto al estado "intermedio"  $j = i'$ . Esto es que la acción de control tomada para el inicio del escalón de tiempo para causar el cambio de estado, es sin el evento ficticio "ca".

Las expresiones 1°, 4° y 6° son todos eventos "ca" reales.

Tomamos la acción de control para iniciar cada escalón de tiempo, nunca se debería tomar una acción cuando ocurra el evento ficticio ( $u=0$ ). Esto se debe a que la acción se toma solamente en respuesta a los cambios de estado. Por lo que si el estado es tal, que una acción  $u \neq 0$ ; la acción de control debería de haber sido tomada en respuesta para el evento real que causa en el sistema la transición de estado, y no en respuesta a eventos ficticios que ocurren para escalones de tiempos tardíos.

Para completar la formulación, se ha introducido un siguiente costo de estructura.

Denotemos este costo para el  $k$ -ésimo escalón de tiempo por  $C(y^k, z^k, u^k)$ , de donde  $u^k$  es la acción de control tomada para comenzar el escalón de tiempo cuando el estado es  $(Y^k, Z^k)$ .

Nuestro objetivo es encontrar una estrategia estacionaria óptima  $\pi^*$  que minimice el **costo total descontado** para ser colocado en un horizonte finito.

$$V_{\pi}^{\alpha}(i) = \inf_{\pi} E_{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot C(y_k, z_k, u_k) \cdot \frac{1}{X_0} = i \right]$$

Donde el operador  $E[\dots]$  representa el operador esperanza, y  $\alpha(0 < \alpha < 1)$  es un dado factor de descuento.

Obtenemos la estrategia óptima estacionaria  $\phi^*$  minimizando el **costo promedio**:

$$\bar{V}_{\phi} = \inf_{\phi} \left[ \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot E_{\phi} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} C(y_k, z_k, u_k) \right] \right]$$

Más adelante se considerará esta ecuación.

Tomaremos el costo de un paso por ser proporcional a la longitud de la cola de espera, resultando la acción de control tomada para el comienzo del escalón de tiempo.

Se toma  $\beta$  como positivo y está ligado a mantener el costo. Tenemos que:

$$C(y, 0, u) = \beta \cdot y$$

$$C(y, 1, u) = \begin{cases} \beta \cdot [y - C]^* & u=1 \\ \beta \cdot y & u=0 \end{cases}$$

$$C(y, 2, u) = \begin{cases} \beta \cdot [y - 2C]^* & u=2 \\ \beta \cdot [y - C]^* & u=1 \\ \beta \cdot y & u=0 \end{cases}$$

Donde la acción  $u = 1, 2$  reduce la longitud de la cola de espera del vestíbulo. El costo de estructura es motivado por la minimización del promedio de la longitud de la cola de espera, y es equivalente a minimizar el promedio del tiempo de espera de los pasajeros en el sentido para un estado seguro.

Aplicando la ley de Little:  $E["y" \text{ longitud de la cola de espera}] = \lambda \cdot E[\text{tiempo de espera de los pasajeros}]$ .

El siguiente lema establece que cualquier estrategia  $\pi$  reditúa en un costo finito.

Lema:  $V_{\pi}^{\alpha}(i) < \infty$  para  $i \in X$  y para toda estrategia  $\pi$ , provisto un  $\alpha \in (0,1)$  y un  $\beta < \infty$ .

Prueba: los arribos reales se realizan uno por vez para cualquier longitud de cola inicial  $y_0 < \infty$  y para una estrategia  $\pi$ , la longitud de la cola de espera para un  $k$ -ésimo escalón de tiempo satisface:

$$\begin{aligned}
 y_k &\leq y_0 + k. \\
 V_{\pi}^{\alpha}(i) &= E_{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot C(y_k, z_k, u_k) \cdot \frac{1}{X_0} = i \right] \leq \\
 &\leq E_{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot \beta \cdot y_k \cdot \frac{1}{X_0} = i \right] \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot \beta \cdot (y_0 + k) = \\
 &= \beta \cdot \left[ \frac{y_0}{1 - \alpha} + \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \right] < \infty
 \end{aligned}$$

## ECUACIÓN DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Dadas todas las estrategias redituables para costos finitos, las que se obtuvieron a través del lema anterior, deseamos obtener aquella que exprese el menor costo posible. Aquí se desarrollarán las ecuaciones de programación dinámica que satisfarán tales requisitos.

Llamaremos  $V_n^{\alpha}(i)$  costo óptimo sobre  $n$ -ésimo escalón de tiempo comenzando desde el estado "i".

De modo que el costo de un paso se define no-negativo y el conjunto acción  $U = \{0,1,2,\}$  es finito, para  $\alpha \in (0,1)$  el algoritmo de programación dinámica es:

$$V_{n+1}^\alpha(i) = \min_{u \in U(i)} \left[ C(i,u) + \alpha \sum_j P_{ij}(u) \cdot V_n^\alpha(j) \right]$$

Con  $V_0^\alpha(i) = 0$  converge para la función de valor óptimo;

$V_{\pi^*}^\alpha(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^\alpha(i)$  que satisface la ecuación de optimización:

$$V_{\pi^*}^\alpha(i) = \min_{u \in U(i)} \left[ C(i,u) + \alpha \sum_j P_{ij}(u) \cdot V_{\pi^*}^\alpha(j) \right]$$

bajo la misma condición hay una estrategia estacionaria óptima obtenida a través de:

$$u^*(i) = \arg.\min_{u \in U(i)} \left[ C(i,u) + \alpha \sum_j P_{ij}(u) \cdot V_{\pi^*}^\alpha(j) \right]$$

Utilizando las probabilidades de transiciones de estados, y el costo de transiciones de estado ya vistos anteriormente, podemos expresar las ecuaciones de programación dinámica según la forma antes indicada:

(\*) Primero, en los estados de la forma  $(y,0)$ , ningún carro está habilitado, por lo que únicamente la acción permitida es  $u=0$  (no hay actividad), en forma de programación dinámica:

$$V_{n+1}^\alpha(y,0) = \beta \cdot y + \alpha \cdot \lambda \cdot V_n^\alpha((y+1),0) + 2 \cdot \alpha \cdot \mu \cdot V_n^\alpha(y+1)$$

El primer término es el costo de un paso, el segundo término corresponde para el evento "pa", y el término que resta corresponde al evento "ca".

El análisis que efectuamos para el estado de forma  $(y,1)$  es similar; lo que significa que hay un carro disponible y la acción de control es  $(u=0)$  es decir un carro mantenido para el arribo de más pasajeros, y el otro despachado  $(u=1)$ .

$$V_{n+1}^\alpha(y,1) = \min \left\{ \begin{aligned} & \beta \cdot y + \alpha \cdot \lambda \cdot V_n^\alpha((y+1),1) + 2 \cdot \alpha \cdot \mu \cdot V_n^\alpha(y,2) + \alpha \cdot \mu \cdot V_n^\alpha(y,1) \cdot \beta [y-C]^+ + \\ & + \alpha \cdot \lambda \cdot V_n^\alpha((y-C)^+ + 1,0) + 2 \cdot \alpha \cdot \mu \cdot V_n^\alpha((y-C)^+ + 1) \end{aligned} \right\}$$

En esta ecuación, el primer término entre las llaves corresponde a un carro detenido, y el segundo término corresponde a un carro despachado. También se debe notar que en el primer término, uno de los eventos "ca" es ficticio y no provoca cambio de estado, dado que el único carro está ocupado. En cambio en el segundo término, ambos eventos "ca" son reales: un carro está lleno (listo para despachar) al comenzar el escalón de tiempo, y el otro está siendo ocupado cuando el primero se despacha para comenzar el escalón de tiempo.

Finalmente para el estado de la forma (y,2) toda acción es admitida; con  $u=0$  ambos carros se encuentran retenidos, con  $u=1$  se carga y despacha uno de ellos, con  $u=2$  se cargan y despachan a la vez. Veamos con  $u=2$ :

$$V_{n+1}^{\alpha}(y,2)=\min \left\{ \begin{array}{l} \beta \cdot y + \alpha \cdot \lambda \cdot V_n^{\alpha}((y+1),2) + 2\alpha \cdot \mu \cdot V_n^{\alpha}(y,2) \beta \cdot [y-C]^+ + \alpha \cdot \mu \cdot V_n^{\alpha}([y-C]^+ + 1),1) + \\ + \alpha \cdot \mu \cdot V_n^{\alpha}([y-C]^+,2) + \alpha \cdot \mu \cdot V_n^{\alpha}([y-C]^+,1) \cdot \beta \cdot [y-2C]^+ + \alpha \cdot \lambda \cdot V_n^{\alpha}([y-2C]^+) + \\ 2\alpha \cdot \mu \cdot V_n^{\alpha}([y-2C]^+,1) \end{array} \right\}$$

El primer término encerrado entre llaves, corresponde a la retención de ambos carros, aquí ambos eventos "ca" son ficticios, el segundo término tiene en cuenta el despacho de uno de los carros (el evento "ca" será real si corresponde al ascensor que ha sido despachado para iniciar el escalón de tiempo); el tercer término refiere al despacho de ambos carros (aquí ambos eventos "ca" son reales).

Utilizando estas ecuaciones antes indicadas, es posible obtener la estrategia de despacho óptima para  $n \rightarrow \infty$ . Desde el punto de vista computacional se torna prohibitivo, en especial cuando se desea resolver los algoritmos de programación dinámica. Se simplifica almacenando los parámetros del sistema de interés  $[\beta, \lambda, \mu, C, \alpha, \cdot]$ .

## ESTRUCTURA DE LA ESTRATEGIA ÓPTIMA

Utilizando las ecuaciones anteriores, y mostrando que la minimización de la estructura de la estrategia óptima del costo de descuento total en

$$V_{\pi}^{\alpha}(i) = \inf_{\pi} E_{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot C(y_k, z_k, u_k) \cdot \frac{1}{x_0} = i \right]$$

es una estrategia umbral.

Partiremos de una simplificación en la notación de la programación dinámica

$$A_{0,n}(y) = \beta \cdot y + \alpha \cdot \lambda \cdot V_n^\alpha((y+1), 0) + 2\alpha \cdot \mu \cdot V_n^\alpha(y, 1)$$

$\therefore$

$$V_{n+1}^\alpha(y, 0) = A_{0,n}(y)$$

En forma similar podemos asociar los otros términos, expresados como las ecuaciones de programación dinámica dadas; de este modo podemos distinguir tres términos de estructura diferente por lo que:

$$V_{n+1}^\alpha(y, 1) = \min \{A_{1,n}(y), B_{1,n}(y)\}$$

$$V_{n+1}^\alpha(y, 2) = \min \{A_{2,n}(y), B_{2,n}(y), C_{2,n}(y)\}$$

En resumen podemos definir que:

$$A^0(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{0,n}(y)$$

$$A^1(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{1,n}(y) ; B^1(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{1,n}(y)$$

$$A_2(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{2,n}(y) ; B_2(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{2,n}(y)$$

$$C_2(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2,n}(y)$$

Y si observamos los valores óptimos para los estados  $(y, 0)$ ,  $(y, 1)$  e  $(y, 2)$  tenemos que:

$$V_x^\alpha(y, 0) = A_0(y)$$

$$V_x^\alpha(y, 1) = \min \{A_1(y), B_1(y)\}$$

$$V_x^\alpha(y, 2) = \min \{A_2(y), B_2(y), C_2(y)\}$$

Observemos que el conjunto de las ecuaciones que se han descrito son dependientes en  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $C$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ .

## FUNCIONES DE VALORES ÓPTIMOS

Referido a las propiedades de estas funciones de valores óptimos, se expresan cinco lemas y los corolarios que se desprenden de estos; cuyas demostraciones se presentan en el apéndice.

$$\# \text{ Lema 4.1: } V_{\pi}^{\alpha}((y+1),z) \geq V_{\pi}^{\alpha}(y,z) \quad \forall y,z$$

Este lema trata acerca del estado de los valores de la función:  $V_{\pi}^{\alpha}(x)$  son no decreciente en la longitud "y" de la cola de espera. Intuitivamente el mayor número de pasajeros son los que esperan, la tasa mayor de costo acumulado, por lo que se convertirá en la de mayor costo.

$$\# \text{ Lema 4.2: } V_{\pi}^{\alpha}(y,0) \geq V_{\pi}^{\alpha}(y,1) \geq V_{\pi}^{\alpha}(y,2) \quad \forall y$$

Esta lema nos indica que hay una cantidad ordenada de valores de la función, impuesto por "z". Para una longitud de cola fija, z es el mayor número posible de carros, esta opción será la de costo menor. Esto resulta como consecuencia de que en realidad la longitud de la cola y su tasa de costo acumulado, se pueden reducir colocando más carros disponibles y para despachar.

Los siguientes tres lemas muestran la relación entre el número de carros disponibles "z" y la capacidad de cada carro "C".

$$\# \text{ Lema 4.3: } V_{\pi}^{\alpha}((y,C),1) \geq V_{\pi}^{\alpha}(y,0) \quad \forall y \geq C$$

$$\# \text{ Lema 4.4: } V_{\pi}^{\alpha}((y,C),2) \geq V_{\pi}^{\alpha}(y,1) \quad \forall y \geq C$$

$$\# \text{ Lema 4.5: } V_{\pi}^{\alpha}((y,2C),2) \geq V_{\pi}^{\alpha}(y,0) \quad \forall y \geq 2C$$

Por ejemplo el lema 4.3, toma la acción  $u=1$  desde el estado  $((y+C), 1)$  e inmediatamente coloca al sistema en el estado  $(y,0)$  desde el cual la única admitida es la de contener el carro. De modo que el costo para el estado  $((y+C),1)$  nunca puede ser menor que el costo



para el estado  $(y,0)$ , y si  $u=0$  desde el estado  $((y+C),1)$  el costo puede ser únicamente mayor. Los otros dos lemas tienen similar interpretación.

De estos lemas se deriva un conjunto de corolarios. Estos corolarios sirven para revelar la estructura de la estrategia de despacho óptimo.

# Corolario 4.1:  $A^1(y) - B^1(y) \quad \forall \quad 0 \leq y \leq C$  entonces la diferencia es estrictamente decreciente

# Corolario 4.2:  $A^1(y) - B^1(y) \quad \forall \quad y \geq C$

Estos dos corolarios dan a la estructura de la estrategia óptima para el estado de la forma  $(y,1)$  como se ilustra.

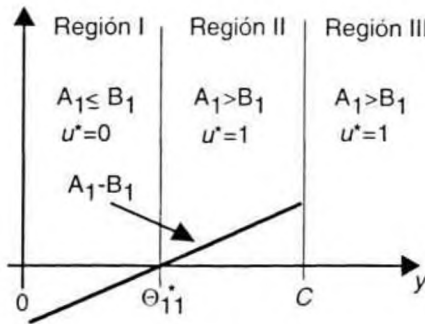


Fig. 5 - Resumen de los corolarios 4.1 y 4.2

Cuando la longitud de la cola de espera es inferior a la capacidad de carga del carro, el corolario 4.1 acierta que la diferencia es estrictamente decreciente en la longitud de la cola "y".

La acción de control óptima la renombramos:  $u^*(y) = 0$  Si  $A_1(y) \leq B_1(y)$  y para otro caso  $u^*(y) = 1$

En realidad esto implica la existencia de un umbral  $\theta_{1,1}^*$  - ver figura 5 -

Y si se cumple que:

$$\#-\# \quad y \leq \theta_{1,1}^* \quad \therefore [A_1(y) - B_1(y)] < 0 \quad \therefore u^*(y) = 0 \quad (\text{Región I})$$

$$\#-\# \quad y > \theta_{1,1}^* \quad \therefore [A_1(y) - B_1(y)] > 0 \quad \therefore u^*(y) = 1 \quad (\text{Región II})$$

$\#-\# \quad y \geq C \quad \therefore u^*(y) = 1$  el carro debería estar despachado siempre.  
(Región III)

Los próximos cinco corolarios dan la estructura de la estrategia óptima para el estado de la forma  $(y,2)$

$\#-$  Corolario 4.3:  $C_2(y) - B_2(y) = \text{cte} \geq 0 \quad \forall y \geq C$ ;  
con esta condición la diferencia es independiente del valor de "y"

$\#-$  Corolario 4.4:  $A_2(y) - B_2(y) \quad \forall y < C$  para esta condición la diferencia es estrictamente creciente en "y". Esto implica la existencia de un umbral  $\theta_{2,1}^*$ ;  $A_2(y)$  es el término más pequeño en

$$V_{\pi^*}^{\alpha}(y,2) = \min\{A_2(y), B_2(y), C_2(y)\} \quad \text{con } u^*(y) = 0$$

verlo en la ilustración en la Región I.

$\#-$  Corolario 4.5:  $A_2(y) > B_2(y) \quad \forall y \geq C$  (Region II)

$\#-$  Corolario 4.6:  $B_2(y) - C_2(y) \quad \forall C < y < 2C$  para esta condición la diferencia es estrictamente creciente en "y". Esto da el umbral  $\theta_{2,2}^*$  para el cual el primer término de la diferencia es el término más pequeño en

$$V_{\pi^*}^{\alpha}(y,2) = \min\{A_2(y), B_2(y), C_2(y)\} \quad \text{con } u^*(y) = 1$$

ver ilustración en la Región III.

El segundo término de la diferencia será el más pequeño en la expresión

$$V_{\pi^*}^{\alpha}(y,2) = \min\{A_2(y), B_2(y), C_2(y)\} \quad \text{con } u^*(y)=2 \quad (\text{Región IV})$$

#- Corolario 4.7:  $A_2(y) > C_2(y)$  y tb.  $B_2(y) > C_2(y) \quad \forall y \geq 2C$ .  
 Ésto implica que el término de la derecha de la primera y segunda inecuación es el término más pequeño con  $u^*(y) = 2$  (Región V)

Los corolarios pueden ser interpretados con la ayuda de la siguiente ilustración:

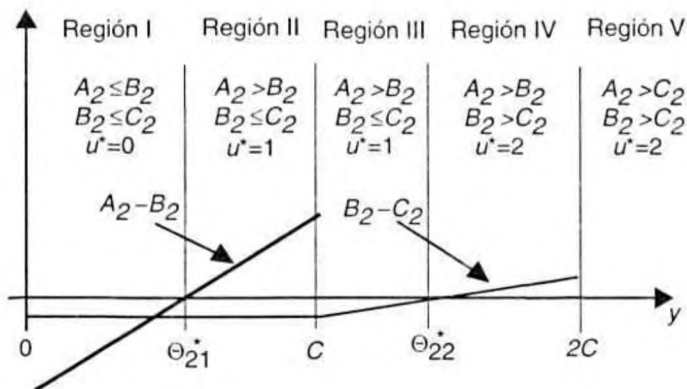


Fig. 6 - Resumen de los Corolarios 4-3 a 4-7

Para este caso también admitimos la estrategia umbral. Estos estados sin embargo tienen dos umbrales, uno para despachar un carro y otro para despachar ambos carros.

Cuando la longitud de la cola es inferior a la capacidad del carro "C", el Corolario 4.3 acierta que  $B_2(y) \leq C_2(y)$

### Condición óptima de la estrategia umbral

Nos basamos en los corolarios y lemas anteriores, para formalizar la condición óptima para la estrategia umbral para el criterio de costo de descuento.

TEOREMA: Para  $\alpha \in (0,1)$  y un costo  $\beta$  limitado mantenido positivo, la estrategia de despacho óptimo es una estrategia umbral, y es fijando el mínimo del costo de descuento total en:

$$V_{\pi}^{\alpha}(i) = \inf_{\pi} E_{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot C(y_k, z_k, u_k) \cdot \frac{1}{X_0} = i \right]$$


Esto es para  $z = 1, \dots, N$  y para  $i = 1, \dots, z$  existe un umbral  $\theta_{z,i}^*(\beta, \lambda, \mu, \alpha)$

tal se cumple:  $(i-1) \cdot C \leq \theta_{z,i}^*(\beta, \lambda, \mu, \alpha) \leq i \cdot C$

$$u^*(y, z) = \begin{cases} z & y \geq \theta_{z,z}^* \\ z-1 & \theta_{z,z-1}^* \leq y < \theta_{z,z}^* \\ \vdots & \vdots \\ 0 & y < \theta_{z,1}^* \end{cases}$$

Además únicamente se requieren N-umbrales con la siguiente restricción:

$$\theta_{z,i}^* = \theta_{z-1,i-1}^* + C \quad z = 2, \dots, N \quad i = 2, \dots, z$$

 Nos aplicamos al ejemplo del sistema de ascensores formado por dos carros.

Tenemos que:

$$0 < \theta_{1,1}^* \leq C$$

$$0 < \theta_{2,1}^* \leq C$$

$$0 < \theta_{2,2}^* \leq 2C$$

$$u^*(y, 1) = \begin{cases} 1 & y \geq \theta_{1,1}^* \\ 0 & y < \theta_{1,1}^* \end{cases}$$

$$u^*(y, 2) = \begin{cases} 2 & y \geq \theta_{2,2}^* \\ 1 & \theta_{2,1}^* \leq y < \theta_{2,2}^* \\ 0 & y < \theta_{2,1}^* \end{cases}$$

Lo podemos comprobar a través de los corolario 4-1 al 4-7

$$\theta_{2,2}^* = \theta_{1,1}^* + C$$

El valor umbral  $\theta_{1,1}^*$ , es el valor de "y" correspondiente para el cruce por cero de  $A_1(y) - B_1(y)$ ; como se observa en la figura N° 5. En cambio en la figura N° 6 podemos observar que:  $\theta_{2,2}^*$ , es el valor de "y" correspondiente al cruce por cero de  $B_2(y) - C_2(y)$

Entonces si comparamos las expresiones ya vistas

$$V_{n+1}^\alpha(y,1) \quad \text{con} \quad V_{n+1}^\alpha(y,2)$$

se observa que:

$$B_{2,n}(y+C) = A_{1,n}(y) \quad \text{y tb} \quad C_{2,n}(y+C) = B_{1,n}(y)$$

Si extendemos estos resultados para el caso de  $N > 2$  carros; cada carro adicional suma una acción de control extra correspondiente a la ecuación de programación dinámica. En cada ecuación de programación dinámica habrá un término adicional "ca" adicionado por cada carro que se agrega. El método de comprobación es exactamente el mismo que el dado anteriormente.

La condición óptima de la estrategia umbral es un resultado que intuitivamente llama la atención. Por ejemplo, cuando un solo carro es permitido, y la longitud de la cola excede la capacidad del carro, éste está habilitado para ser despachado inmediatamente. También está habilitado para despachar un sólo carro cuando el número de pasajeros que esperan es menor que el de la capacidad del elevador, despachando ambos carros parcialmente llenos. El ascensor debería haber servido a una cola de espera entera, compuesta por pasajeros que llegaron antes de que el carro retorne, formando fila en orden cronológico. Los primeros pasajeros de la cola tienen el mayor tiempo de espera y costo acumulado. Para tal situación se hace obvia la estrategia óptima.

La intuición ha permitido buscar una estrategia umbral general para aproximarnos a una tasa de servicio "pa".

Hemos asumido que la medición de la longitud de la cola es posible y que sólo un carro se carga por vez. Para implementar la estrategia umbral en la práctica, sin embargo no es necesario la medición de la longitud de la cola. Todo lo que se necesita es el número de pasajeros en cada carro.

Es muy atractiva la propiedad de la estrategia de despacho óptimo, donde el número total de umbrales está dado por  $(1+2+\dots+N)$ , como ya hemos indicado—, siendo necesario especificar "N". Cuando se utiliza la técnica del "próximo carro", el conjunto más conveniente de umbrales para utilizar es:

$$\left\{ \theta^{1,1}, \theta^{2,1}, \dots, \theta^{N,1} \right\}$$

porque estos son los umbrales que llamamos, cuando despachamos el "próximo carro" diseñado.

## EXTENSIÓN PARA EL CASO DEL COSTO PROMEDIO

Nuestro objeto es encontrar la estrategia óptima estacionaria  $\phi^*$  minimizando el criterio del costo promedio que ya hemos definido. Bajo ciertas condiciones, este análisis puede ser realizado mostrando las propiedades de la estrategia óptima derivadas del criterio del costo de descuento (también ya dado) se lo retiene como un factor de descuento  $\alpha \rightarrow 1$ .

En particular, un costo (escalón) son no negativos, y hay un estado inicial  $i_0 \in X$  y alguna constante finita  $K$  tal que:

$$\left| V_{\pi}^{\alpha}(i) - V_{\pi}^{\alpha}(i_0) \right| \leq K \quad \forall: \begin{cases} \alpha \in (0,1) \\ i \in X \end{cases}$$

Cumplida las condiciones anteriores, entonces tenemos:

- 1#) hay una estrategia óptima estacionaria  $\phi^*$
- 2#) el costo promedio para la estrategia óptima es dada:

$$c = \bar{V}(\phi^*) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} (1-\alpha) \cdot V_{\pi}^{\alpha}(i_0)$$

3#) hay una función circunscripta que satisface siguiente ecuación de optimización:

$$c+h(i)=\min_{u \in U(i)} \left[ C(i,u) + \sum_j P_{i,j}(u) \cdot h(j) \right]$$

$$h(i) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left[ V_{\pi^{\alpha}}^{\alpha}(i) - V_{\pi^{\alpha}}^{\alpha}(i_0) \right]$$

Recreando el problema de despacho de sobrepico, el costo de un paso dado en:

$$C(y,0,u) = \beta \cdot y$$

$$C(y,1,u) = \begin{cases} \beta \cdot [y-C]^* & u=1 \\ \beta \cdot y & u=0 \end{cases}$$

$$C(y,2,u) = \begin{cases} \beta \cdot [y-2C]^* & u=2 \\ \beta \cdot [y-C]^* & u=1 \\ \beta \cdot y & u=0 \end{cases}$$

son no negativas y el primer lema garantiza la condición:

$$\left| V_{\pi^{\alpha}}^{\alpha}(i) - V_{\pi^{\alpha}}^{\alpha}(i_0) \right| \leq K \quad \forall: \begin{cases} \alpha \in (0,1) \\ i \in X \end{cases}$$

es satisfecha. De aquí que podemos utilizar los datos anteriores para obtener la estrategia óptima estacionaria para el caso del costo promedio. Para el caso de costo descuento,  $h(i)$  tiene las mismas propiedades como el valor de la función  $V_{\pi^{\alpha}}^{\alpha}(i)$ . Específicamente,  $h(i)$  satisface los lemas 4.1 ha 4.5

La ecuación que da la condición óptima " $c+h(i)$ ", no es nada más que la programación dinámica para el caso de costo de descuento con un factor de descuento  $\alpha = 1$  y una constante " $c$ ".

Se concluye que la estructura de la estrategia óptima para el caso del costo promedio es también la estrategia umbral. En general los umbrales para el caso del costo promedio son diferentes que para los umbrales del caso del costo de descuento.

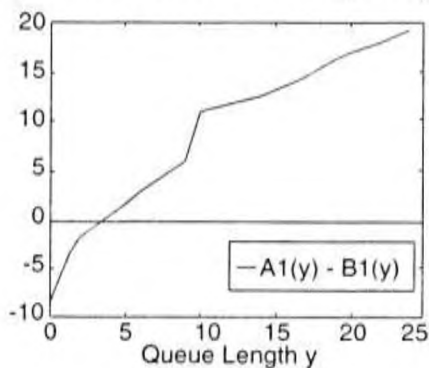
Destaquemos los siguientes ejemplos:

A-) caso de dos carros; costo de descuento

Son dos carros idénticos con  $C=10$  pasajeros; y la tasa de servicio  $\mu = 5$  saltos o tanteos de 5- minutos cada uno, un evento "pa" con una tasa  $\lambda = 30$  pasajeros cada 5 minutos.

A una tasa de eventos total  $\gamma = \lambda + 2\mu = 40$  se le hace corresponder un costo  $\beta = 1$ .

Asumimos que la longitud de la cola está limitada a 100 pasajeros esperando. El arribo de pasajeros al ascensor se produce cuando la cola del vestíbulo está completa. El factor de descuento  $\alpha = 0,99$ ; el algoritmo de programación dinámica converge luego de 200 iteraciones



(a)

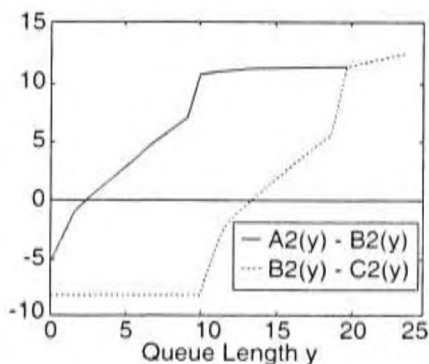


Fig. 7 - Gráfica dada para un umbral óptimo en caso de dos carros.-, es la solución numérica del ejemplo



En la fig 7-a se puede observar que el óptimo umbral para despachar un ascensor cuando  $z = 1$ , para este ejemplo es equivalente a  $\theta_{1,1}^* = 4$ .

En la fig. b, se observa que para este ejemplo el umbral para el despacho de un ascensor cuando  $z = 2$  es equivalente a  $\theta_{2,1}^* = 3$ .

Y el umbral para el despacho de ambos ascensores es:  $\theta_{2,2}^* = 14 = \theta_{1,1}^* + C$

### B-) Caso de dos carros. Costo promedio

Se utiliza simulación "fuerza bruta" para encontrar el umbral óptimo minimizando el tiempo de espera promedio de pasajeros. Para este ejemplo los pasajeros arriban uno por vez de acuerdo a un proceso de Poisson, con una tasa de arribo  $\lambda$  para una cola de capacidad de 100 pasajeros.

Se almacena el tiempo de arribo de cada pasajero. Cada ascensor tiene un  $C=10$  pasajeros que son inmediatamente cargados en un ascensor y luego despachados. Se utiliza una estrategia de despacho con dos umbrales. El trabajo derivado de esta estrategia es:

Cuando un carro está disponible ( $z = 1$ ) y la longitud de la cola y  $\geq \theta_1$  (primer umbral), entonces  $C=10$  pasajeros que serán cargados inmediatamente en un ascensor y se despacharán.

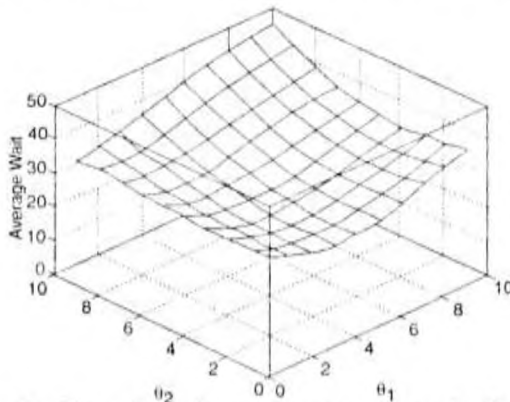
Cuando  $z = 2$  y se cumple que  $y \geq \theta_2$ ; entonces si  $y \leq C$  un carro es inmediatamente cargado y despachado;  $2 C = 20$  pasajeros serán cargados inmediatamente y despachados en ambos carros.

Para cada carro el tiempo de servicio es una variable aleatoria, dibujada como una expresión de distribución exponencial con una tasa de servicio  $\mu = 5$  saltos o tanteos con un intervalo de 5 minutos cada uno.

La carga de los pasajeros es tipo FIFO. El tiempo de espera de los pasajeros es el intervalo desde el tiempo en que arriban al vestíbulo hasta el tiempo en que el carro que sirve a los pasajeros es despachado. Para el comienzo de cada arranque  $y=0$ ,  $z=2$ .

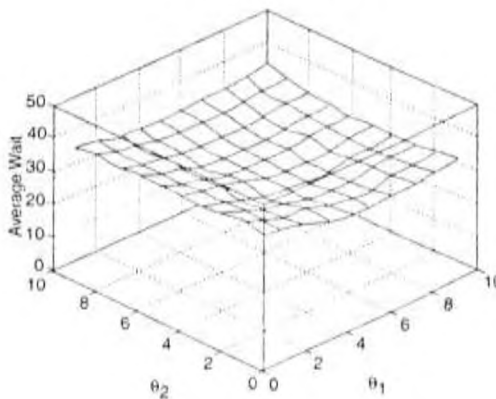
La respuesta es una superficie  $J(\theta_1, \theta_2)$ , referida a un sistema de tres ejes. En el eje  $z$  se tabula el tiempo de espera promedio de los pasajeros, los umbrales se tabulan en los ejes  $x$  e  $y$ .

Cada punto de esta superficie se lo obtiene al promediar el tiempo de espera promedio de los pasajeros, sobre una simulación de 10 arranques. Cada simulación de arranque sirve a 10.000 pasajeros, de modo que cada punto de la curva representa el tiempo promedio sobre 100.000 pasajeros.



*Fig. 8 - Superficie de respuesta para un "pa" con tasa  $\lambda = 30$  pasajeros cada 5 minutos*

*Aquí el tiempo esperado mínimo es 23.61 y se la tiene para ambos umbrales iguales a 4.*



*Fig. 9 - Superficie de respuesta para un "pa" con tasa  $\lambda = 45$  pasajeros cada 5 minutos*

*Aquí el tiempo esperado mínimo es 26.77 y se la tiene para ambos umbrales iguales a  $\theta_1 = 7$   $\theta_2 = 7$ .*

En la figura 8 observamos los umbrales óptimos dados para la minimización del tiempo de espera promedio de pasajeros, los cuales verificamos que son diferentes para el caso de descuento (ejemplo anterior). Si bien ambos casos poseen las mismas propiedades, no tienen el mismo valor numérico, dado que corresponden a umbrales diferentes. Para el umbral óptimo el tiempo promedio de espera de pasajeros es 23.61s. El peor tiempo de espera para esta misma tasa de arribo es 45.46s, cuando  $\theta_1^* = \theta_2^* = 10,93\%$  más largo que la espera óptima.

Ya se ha mencionado dos estrategias de despacho para el caso de un simple sobrepico; una se da cuando el despacho se produce tan pronto como el último pasajero entra en el ascensor (lleno), y la otra es que se da cuando se espera que se llene un ascensor hasta la mitad de su capacidad o el timer expira a los 20s.

El despacho cuando el primer pasajero entra es equivalente a la estrategia con  $\theta_1 = \theta_2 = 1$ ; el cual da un tiempo de espera de 29,15s, esto es 23% mayor que la espera óptima.

Para el caso de llenado a media capacidad 20s adicionales (para tiempo de partida), no se puede estimar el tiempo de espera desde la figura 8, dado que no es posible determinar el efecto de los 20s.

Se elige un umbral para ambos, iguales a 5, sin embargo el tiempo de espera es de 25,72s o sea 9% superior a la espera óptima.

En la figura 9 se observa que el peor tiempo de espera es de 36,58s.

En resumen: el umbral óptimo varía con la tasa de arribo. La curvatura en forma de "bowl" para una respuesta sugiere un cierto potencial penado (0 posibilidades no permitidas) por la elección de umbrales erróneos. Estos puntos son necesarios para un controlador de despacho con la habilidad de adaptarse a los cambios de umbral en las condiciones de operación del sistema.

---

1. Ing Daniel Héctor Nacif  
Instituto de Automática - U.N. San Juan

## IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROL DE DESPACHO ÓPTIMO

Para implementar un plan umbral enfoquemos dos problemas:

Pr-1) Para una dada tasa de arribo y de servicio se necesitan determinar los valores umbrales.

Pr-2) Como la tasa de arribo cambia en el período de sobrepico, se necesita un mecanismo para adaptar los umbrales, el cual puede ser abordado resolviendo la cadena de Markov, (ver figura 4 -) y evaluando el tiempo de espera promedio de los pasajeros, como una función de diferentes umbrales para determinar los valores de espera promedio mínimo, para un margen de la tasa de arribo de pasajeros.

Se trata de determinar el umbral óptimo sobre un intervalo estimado de 5 minutos, por lo que es necesario analizar la operación transitoria de la cadena de Markov. Pero los resultados previstos reales no responden a la estrategia mencionada, puesto que el tiempo de servicio de los ascensores no tiene una distribución del tipo exponencial.

## ESTIMACIÓN CONCURRENTENTE

Nos permite estimar "ON-LINE" el tiempo promedio de espera de los pasajeros para cualquier despacho umbral. La idea principal es la de observar la evolución de un paso de muestra, en un sistema real de ascensor, pues estos operan bajo umbrales preseleccionados.

Un paso de muestra involucra "pasos observados" (ocurrencia de eventos y su correspondiente tiempo de ocurrencia) que se procesan construyendo un conjunto de pasos de muestras que deberían resultar, si el sistema está operando bajo un conjunto hipotético de umbrales distintos. Estos pasos de muestra hacen posible estimar el correspondiente tiempo de espera de los pasajeros.

El proceso de construcción de estos pasos muestrales no interfiere con el normal funcionamiento del sistema de ascensor real.

## CONSTRUCTIVIDAD DE PASO MUESTREAL

Consideremos un sistema de eventos discretos (SED) con parámetros discretos finitos en donde

$\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \therefore \theta_j \in \theta ; j = 1, 2, \dots, m$  es en general un vector valuado.

Suponiendo que el paso muestral generado por un SED es una función de parámetro  $\theta_j$  (por ejemplo un umbral de despacho), y se designa el paso muestral generado bajo el parámetro  $\theta_j$  por el par de secuencias  $\{e_k^j ; t_k^j\}$ ; de donde:

$K = 1, 2, \dots$  es el índice de conteo de eventos

$e_k$  = k-ésimo evento

$t_k$  = tiempo de ocurrencia del k-ésimo evento (equivale al paso muestral que puede ser definido por  $\{x_k^j ; t_k^j\}$ )

$X_k$  = es el estado ingresado cuando ocurre el k-ésimo evento para el tiempo  $t_k$

Asumimos que el SED opera bajo  $\theta_j$  y que todos los eventos y los tiempos de ocurrencia de estos son directamente "observables"  $e_k^j ; t_k^j$  para  $K = 1, 2, \dots$

El problema, es el de utilizar la observación de un paso muestral para construir el paso muestral  $\{e_k^j ; t_k^j\}$  para  $k = 1, 2, \dots$  para cualquier  $\theta_j ; j = 1, 2, \dots, m$

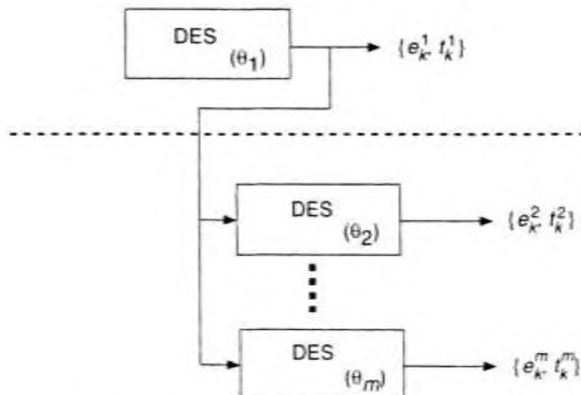


Fig. 10 - esquema del problema de constructividad del paso muestral

Para obtener un algoritmo ON LINE, trabajaremos las muestras en tiempo real... Además construiremos en forma concurrente, para  $m-1$  pasos muestrales, para  $j=2,3,\dots,m$

Se ha de destacar que para cualquier "métrica de muestreo" como  $L(\theta_j)$  (por ejemplo el tiempo promedio de espera para algún despacho umbral  $\theta_j$ ) se la obtiene como función del correspondiente paso muestral  $\{e_k^j; t_k^j\}$  para  $k = 1,2,\dots$

Se busca minimizar:  $\theta \in \Theta \quad J(\theta) = E[L(\theta)]$

$L(\theta)$  = performance obtenida sobre un paso muestral específico del sistema

$J(\theta)$  = esperanza sobre todo posible paso muestral

Si existe la solución al problema de constructividad del paso muestral; es posible aprender sobre el funcionamiento del SED bajo todo valor posible del parámetro en  $\Theta$  desde un simple tanteo.

Por ejemplo un simple paso muestral obtenido bajo un valor dado de un parámetro; más importante es si la performance estimada  $L(\theta_1), L(\theta_2), \dots, L(\theta_m)$ , son todas posibles.

Para la conclusión de un tanteo, se puede seleccionar inmediatamente un parámetro óptimo, de candidato, como:  $\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} L(\theta)$

Esto es verdaderamente una selección óptima, dependiendo de la exactitud estadística del estimador.

En la práctica estas propiedades estadísticas del SED y el tamaño del parámetro  $\theta$  pueden hacer necesarios, usar un procesamiento interactivo, para obtener la identificación última del valor óptimo del parámetro. Si el parámetro  $\Theta$  es pequeño es posible obtener todos los

estimadores  $L(\theta^1), L(\theta^2), \dots, L(\theta^m)$  concurrentes. El cual da el nombre de estimación concurrente asociado a la solución del problema de constructividad de paso muestral y al problema básico de optimización.

## AUTÓMATAS DE ESTADOS TEMPORIZADOS ESTOCÁSTICOS

Este tipo de autómatas nos permite un marco para modelar un SED, y se utilizará el método de construcción de paso muestral concurrente (ya indicado).

La estructura de reloj es dada  $V = \{v_i, i \in E\}$   $v_i = \{v_i(1), v_i(2), \dots\}$  representa procesos aleatorios y estos elementos son valores reales.

Usualmente se asume que los tiempos de vida  $v_i$  son variables aleatorias independientes e idénticas distribuidas (i.i.d.) con distribución  $G_i$ ; aún cuando el tiempo de vida para el evento "i" es necesario para que tengamos una muestra de  $G_i$ . La secuencia de estado generadas a través de este mecanismo es un proceso estocástico semi-Markov.

Será de ayuda si sintetizamos los pasos exactos involucrados en la generación de un paso muestral del autómata de estado temporizado estocástico.

Definiremos dos o más variantes de estado como sigue:

a) asociamos con cada evento factible una variable de estado  $\tau_i$ , que es la próxima ocurrencia de tiempo del evento "i". La utilidad de esta variable, es dar el tiempo de ocurrencia para cada evento factible. El próximo evento a ocurrir (evento gatillo o disparador) es dado por:

$$e' = \arg \min_{i \in E} \{ \tau_i \}$$

el tiempo para el cual el evento ocurre es dado inmediatamente por  $t' = \tau_{e'}$

Otra variable de estado que se le encuentra uso es el (score) tanteador del evento "i", el cual se lo representa por  $s_{i,n}$   $i \in E$  que ha ocurrido.

Ahora se puede construir un paso muestral para cualquier SED modelado por un autómata temporizado estocástico; como sigue:

1) Procedimiento de construcción del paso muestral.

a) Dando el estado actual  $X_k$  y el tiempo del próximo evento  $t_{ik}$  para todo evento factible  $i \in \Gamma(X_k)$  determine el próximo evento  $t_{k+1} = \min_{i \in \Gamma(X_k)} \{ \tau_{i,k} \}$

b) Determinar el evento disparador  $e_{k+1} = \arg \min_{i \in \Gamma(X_k)} \{ \tau_{i,k} \}$

c) Determinar el próximo estado  $x_{k+1} = f(x_k, e_{k+1})$

d) Sobredatar el tiempo del próximo evento para todos los eventos  $i \in \Gamma(x_{k+1})$

$$\tau_{i,k+1} = \begin{cases} \tau_{i,k+1} & \text{si } i \neq e_{k+1}, i \in \Gamma(x_k) \\ t_{k+1} + v(s_{i,k} + 1) & \text{si } i = e_{k+1}, i \in \Gamma(x_k) \end{cases}$$

e) Sobredatar el evento tanteador (score)

$$s_{i,k+1} = \begin{cases} s_{i,k} + 1 & \text{si } i = e_{k+1} \\ s_{i,k} & \text{otro caso} \end{cases}$$

f) Aumentar el valor de "k" y volver al paso -a-

Para algún estado dado este procedimiento se inicializa:

$$/ x^0 \quad s^{i,0} = 0 \quad \forall i \in E \quad ; \quad \tau^{i,0} = v^i(1) \quad \forall i \in \Gamma(x^0)$$

Si observamos un sistema ascensor real podemos simplificar los eventos observados  $e_{k+1}$  como ellos ocurren y guardan su tiempo de ocurrencia  $t_{k+1}$ . Conocemos la función de transición de estados para el sistema, podemos utilizar el paso -a- para datar el estado. A través del paso -e-, y podemos datar el evento tanteador o score.

Nuevamente en ausencia del tiempo de vida podemos explicitar el sobredato del próximo tiempo de evento. Se puede evaluar esto a



través del paso  $-d-$ , luego de ocurrido el evento sus tiempos de vida han sido determinados.



- Para comenzar con la construcción del paso muestral; Nuevamente retomamos el ejemplo del sistema ascensor con dos carros operando bajo un plan umbral  $\theta_{1,1}^* = \theta_{2,1}^* = 2$ . Observar la figura N° 4 anterior; recordando que "y" es la longitud de la cola de espera del vestíbulo; "z" es el número de carros esperando en el vestíbulo principal.

$$E = \{pa, ca\}$$

$$X = \{(y,z) ; y=0,1,\dots ; z=0,1,2\}$$

No se ha diferenciado entre el arribo de los diferentes carros; puesto que se asumió que todos los carros son idénticos. Se ha supuesto que no hemos tenido información guardada acerca de la distribución del tiempo de vida de los eventos "pa" y "ca", por lo que no se puede generar los eventos tiempos de vida, que se necesitaría para trabajar.

Se supone que el estado inicial es (0,2). El único evento factible en este estado es "pa" y tenemos  $\tau_{pa,0} = v_{pa}(1) u^*(y,z)$ . Veamos como aplicamos el procedimiento de construcción del paso muestral, para pocos eventos, para un paso muestral típico.

- 1er. Evento: (k=1) suponiendo que esto se observa para un tiempo  $t_1$  solamente el evento "pa" ha sido factible lo que se entiende  $t_1 = v_{pa}(1)$ . Aplicando el paso al próximo estado (1,2); el segundo evento pa, comienza a ser factible. A través del paso  $-d-$ , el próximo evento pa ocurrirá para el tiempo  $\tau_{pa,1} = t_1 + v_{pa}(2)$

Sobredatamos el score de pa desde 1 a 2.

- 2do. Evento: (k=2) suponiendo que el segundo evento "pa" es observado al tiempo  $t_2$ . Repitiendo los procesos debemos tener.  $t_2 = t_1 + v_{pa}(2)$ , el nuevo estado es (0,1). Un tercer

evento "pa" comienza a ser factible; se ha alcanzado el umbral de despacho y los carros han sido despachados; un evento "ca" también comienza a ser factible por el paso -d- ocurre a su vez el tercer evento "pa" que será.  $\tau_{pa,2} = t_2 + v_{pa}$  (3) y el tiempo de ocurrencia para el evento "ca" será  $\tau_{ca,2} = t_2 + v_{ca}$  (1)

- 3er. Evento: (k=3) suponiendo que es observado para  $t=t_3$ . En este caso el evento puede haber sido un "pa" o "ca", dado que ambos son factibles para el estado (0,1).

Asumimos que el evento el evento "ca" ocurre, primero, esto implica que  $t_3 = t_2 + v_{ca}$  (1);  $t_3 < t_2 + v_{pa}$  (3)

El evento "ca" causa una transición dentro del estado (0,2) donde el evento factible es reducido por "pa", lo cual ocurre para el tiempo  $\tau_{pa,3} = \tau_{pa,2}$

El paso muestral construido hasta ahora es  $\{(pa,t_1), (pa,t_2), (ca,t_3), \dots\}$

Como el paso muestral desarrollado; cualquier métrica de interés puede ser estimada como la función  $\{e_k, t_k\}$   $k = 1, 2, \dots$

La construcción del paso muestral se determina cuando la estimación de performance ha sido obtenida para algún grado deseado de exactitud estadística.

Este ejemplo ilustra como formalmente construimos un paso muestral de un SED cuando aún los tiempos de vida no son aprovechables pero pueden alcanzar a ser observados.

## CONSTRUCCIÓN DE UN PASO MUESTREAL CONCURRENTE (es un método aproximado)

Se aplica a un SED con distribución arbitraria del tiempo de vida del evento

El punto de partida es considerando el funcionamiento de un SED bajo valores específicos de parámetros  $\theta$ . Se asume que todo evento y su tiempo de ocurrencia son observables ahora modificamos una secuencia de reloj real asociada con todo evento  $i \in E$ .

Se define  $V_i(n) = \{v_i(1), v_i(2), \dots, v_i(s_{i,n})\}$   $i \in E$  para hacer la secuencia de vida observado del evento "i", luego de n eventos totales han sido observados.

El objetivo es usar la secuencia del tiempo de vida observado (ecuación anterior) la cual no ha sido utilizada en la construcción del hipotético paso muestral que podría resultar si el mismo SED fuera operado bajo algún valor distinto de parámetros  $\theta \neq \theta$

$k \leq n$  es el número total de eventos en este paso muestral hipotético que se ha construido con la ecuación

$$\bar{V}_i(k) = \{v_i(1), \dots, v_i(\bar{s}_{i,k})\} \quad i \in E$$

Donde  $\bar{s}_{i,k}$  es el score correspondiente del evento "i" en el paso muestral construido.

Próx. definición

$$\bar{V}_i(n,k) = \{v_i(\bar{s}_{i,k}+1), \dots, v_i(s_{i,n})\} \quad i \in E$$

Esta secuencia contiene tipo de vida de todo evento, el cual son en  $V_i(n)$  pero no es en  $\bar{V}_i(k)$  Asociamos con,

$$\bar{V}_i(n,k) \quad A(n,k) = \{i : i \in E, \bar{s}_{i,k} > s_{i,n}\} \quad i \in E$$

consiste en el subconjunto del evento i para la cual  $\bar{V}_i(n,k)$  el cual contiene por lo menos un elemento. Hay al menos un tiempo de vida observado posible que no ha sido aún usado en la construcción del paso muestral.

$A(n,k)$  se denomina al conjunto de eventos probables por contener el conjunto de eventos cuyos tiempos de vida son posibles de ser utilizados para construir el paso muestral hipotético luego de n-eventos observados.

$\bar{x}_k$  = denota el estado después del evento k en la construcción del paso muestral.

$\bar{e}_k$  = es el evento disparador par el k-1 ésimo estado visitado en este paso muestral.

Definimos

$$M(n,k) = \Gamma(\bar{x}_k) - [\Gamma(\bar{x}_{k-1}) - \{\hat{e}_k\}]$$

Es el conjunto de eventos perdidos después de n-eventos observados, esta contiene todos los eventos que son factibles para el estado  $(\bar{x}_k)$ , y los eventos que no son factibles en el estado  $(\bar{x}_{k-1})$

Intuitivamente  $M(n,k)$  está formado por todos estos eventos cuyo tiempo de ocurrencia se pierde desde la perspectiva del paso muestral construido cuando estos entran al estado  $(\bar{x}_k)$  el tiempo de ocurrencia para eventos en  $\Gamma(\bar{x}_{k-1})$  son conocidos y posibles para ser usados en la construcción del paso muestral si ellos son aún factibles; los eventos no factibles en  $(\bar{x}_{k-1})$  han comenzado a ser factibles en el estado  $(\bar{x}_k)$ ; de otro modo son perdidos tan lejos como indica su tiempo de ocurrencia.

Respecto a la sección anterior, y dado que en orden a continuar la construcción del paso muestral desde el estado  $(\bar{x}_k)$  en el paso muestral hipotético, deberíamos tener tiempos de vida (equivalente a tiempos de ocurrencia) para los eventos, en los factibles eventos  $\Gamma(\bar{x}_{k-1})$  tal que  $\hat{e}_k \in \Gamma(\bar{x}_{k-1})$

La condición necesaria y suficiente para la construcción de un paso muestral está dada por cuando el evento  $e_{n+1}$  se observa en el actual SED la construcción del paso muestral hipotético puede continuar si y sólo si se cumple  $M(n+1,k) \subseteq A(n+1,k)$  de otro modo es suspendida la construcción del paso muestral hipotético en el estado  $(\bar{x}_k)$  hasta que algún futuro evento observado se satisfaga. Con todos los eventos observados (condición anterior) se chequea si y sólo si se satisface; el procedimiento de construcción se invoca para asignar nuevos valores al estado, de otro modo la construcción se suspende para  $(\bar{x}_k)$  hasta que algún evento futuro observado permita que se satisfaga la condición anterior.

Notar que en todos los eventos observados  $A(n,k)$  se sobredatan y posiblemente se agranda, mientras el  $M(n,k)$  permanece fijo. Esto sólo depende de  $(\bar{x}_k)$

En resumen las condiciones significativas para la construcción de un paso muestral concurrente son las siguientes:

- 1- Asumimos que  $\theta$  no afecta a la distribución del tiempo de vida del evento en un SED, pero únicamente afecta a la estructura de transición de estado. Si este no es el caso, el algoritmo descripto deberá tener ciertas modificaciones que no son tratadas en este texto.
- 2- Cambios en  $\theta$  no deberían introducir nuevos tipos de eventos dentro del conjunto de eventos E.
- 3- La estructura de la transición de los estados del sistema observado se asume irreductible. En general no debería haber transición de estado provocando un evento para comenzar que sea permanentemente deseable, lo que implica que la ecuación anterior puede que nunca se satisfaga.

## REFERENCIAS

1. Optimal Dispatching Control for Elevator Systems During Uppeak Traffic. - David L. Pepyne and Christos G. Cassandras - IEEE Transactions on Control Systems technology, vol 5, N° 6 November 1997.
2. Design and Implementation of an Adaptive Dispatching Controller for Elevator Systems During Uppeak Traffic. David L. Pepyne and Christos G. Cassandras - IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol 6, N° 5, September 1998.
3. Procesos Aleatorios - Yuri Rozanov - Editorial Mir Moscu 1973 versión castellana.
4. Applied Probability Models with Optimization Applications. - Sheldon M. Ross University of California, Berkeley - Holden-Day Series in Management Science 1970.
5. Introduction to Matrix Analysis - second edition - Richard Bellman - University of Southern California - Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia 1979.